D-MATH — Lineare Algebra I — HS 2021

Prof. Richard Pink

Serie 9

Lineare Abbildungen, Kern, Bild, Darstellungsmatrizen & Rang

1. Sei V ein beliebiger Vektorraum. Beweise oder widerlege:

   (a) Sei $V' \subset V$ ein Unterraum. Jeder Automorphismus $f\colon V' \to V'$ kann zu einem Automorphismus $\overline{f}\colon V \to V$ fortgesetzt werden.

   (b) Für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ gilt $V = \mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Bild}(f)$.

   (c) Jeder Vektorraum ist eine innere direkte Summe von 1-dimensionalen Unterräumen.

   (d) Für Unterräume V_1, V_2, V_3 von V gilt $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ genau dann, wenn $V = V_1 + V_2 + V_3$ und $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0\}$ ist.

*2. Betrachte K-Vektorräume V_i für alle $i \in I$. Zeige die universellen Eigenschaften des Produkts und und der äusseren direkten Summe:

   (a) Für jeden Vektorraum W zusammen mit linearen Abbildungen $f_i\colon W \to V_i$ für alle $i \in I$ existiert genau eine lineare Abbildung $f\colon W \to \bigtimes_{i\in I} V_i$ so dass für alle $j \in I$ die Verknüpfung $\mathrm{proj}_j \circ f = f_j$ ist.

   (b) Für jeden Vektorraum W zusammen mit linearen Abbildungen $f_i\colon V_i \to W$ für alle $i \in I$ existiert genau eine lineare Abbildung $f\colon \boxplus_{i\in I} V_i \to W$ so dass für alle $j \in I$ die Verknüpfung $f \circ \mathrm{incl}_j = f_j$ ist.

3. Zeige: Das folgende Diagramm kommutiert insgesamt genau dann, wenn alle 6 Teilquadrate kommutieren.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "a_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[d, "f_4"] \\
B_1 \arrow[r, "b_1"] \arrow[d, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "b_2"] \arrow[d, "g_2"] & B_3 \arrow[r, "b_3"] \arrow[d, "g_3"] & B_4 \arrow[d, "g_4"] \\
C_1 \arrow[r, "c_1"] & C_2 \arrow[r, "c_2"] & C_3 \arrow[r, "c_3"] & C_4
\end{tikzcd}$$

4. Seien lineare Abbildungen $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}.$$

Sei weiterhin

$$a := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

sei b die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und sei

$$c := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Zeige, dass a eine Basis des $\mathbb{R}^4$ und c eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimme $g \circ f$ und die Darstellungsmatrix ...

(i) von f bezüglich der Basen a, b.

(ii) von g bezüglich der Basen b, c.

(iii) von $g \circ f$ bezüglich der Basen a, c.

5. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 2y \\ -2x + 4y \\ 3x - 6y \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung. Finde Basen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, bezüglich welcher die Darstellungsmatrix von f die Form $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \leqslant r, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $r = \mathrm{Rang}(A)$ annimmt.

6. Betrachte den durch Linksmultiplikation mit der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

definierten Endomorphismus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(a) Verifiziere die Gleichungen $f^2 := f \circ f \neq 0$ und $f^3 := f \circ f \circ f = 0$.

(b) Finde eine Basis u, v, w von $\mathbb{R}^3$ mit $f(u) = 0$ und $f(v) = u$ und $f(w) = v$.

(c) Bestimme die Abbildungsmatrix von f bezüglich der Basis (u, v, w).