Serie 10

Darstellungsmatrizen, Rang, Dualraum, Quotientenvektorraum

1. Sei $P_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Polynome von Grad $\leqslant n$ mit reellen Koeffizienten.
   (a) Zeige, dass
   $$F\colon P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})\ p \mapsto p'' + p'$$
   eine lineare Abbildung ist, wobei p' die Ableitung von p bezeichnet.
   (b) Bestimme die Matrix von F bezüglich der Basis $(1, x, \ldots, x^n)$ von $P_n(\mathbb{R})$.

2. Seien U, V, W beliebige Vektorräume. Beweise die folgenden Ungleichungen:
   (a) Für beliebige lineare Abbildungen $f, g\colon U \to V$ gilt
   $$\mathrm{Rang}(f+g) \ \leqslant\ \mathrm{Rang}(f) + \mathrm{Rang}(g).$$
   (b) Für beliebige lineare Abbildungen $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to W$ gilt
   $$\mathrm{Rang}(g \circ f) \ \leqslant\ \min\big\{\mathrm{Rang}(f), \mathrm{Rang}(g)\big\}.$$
   (c) Formuliere und beweise die analoge Eigenschaft für Matrizen.

3. Bestimme die Ränge der folgenden rationalen $n \times n$-Matrizen in Abhängigkeit von der positiven ganzen Zahl n.
   (a) $(k\ell)_{k,\ell=1,\ldots,n}$
   (b) $\big((-1)^{k+\ell}(k+\ell-1)\big)_{k,\ell=1,\ldots,n}$
   *(c) $\left(\dfrac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!}\right)_{k,\ell=0,\ldots,n-1}$

4. (a) Sei V' ein Unterraum eines K-Vektorraums V. Zeige, dass jede Linearform auf V' eine Fortsetzung zu einer Linearform auf V besitzt.
   (b) Sei $V = V_1 \oplus V_2$. Konstruiere und beweise einen Isomorphismus
   $$V^\vee \cong V_1^\vee \boxplus V_2^\vee.$$

5. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V, sei $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ die dazu duale Basis des Dualraums $V^\vee$, und sei $(k_1, \ldots, k_n)$ die zu $B^\vee$ duale Basis des Bidualraums $(V^\vee)^\vee$. Zeige, dass der natürliche Isomorphismus
   $$\mathrm{ev}\colon V \xrightarrow{\sim} (V^\vee)^\vee,\ v \mapsto \mathrm{ev}_v$$
   jedes v_j auf das entsprechende k_j abbildet.

6. Betrachte den Unterraum

$$U := \langle\ (2,2,2,2,2)^T,\ (1,2,2,2,2)^T,\ (1,1,2,2,2)^T\ \rangle$$

von $V := \mathbb{R}^5$. Bestimme eine Teilmenge der Standardbasis von $\mathbb{R}^5$, welche sich bijektiv auf eine Basis von V/U abbildet.

7. Beweise die folgende Proposition aus der Zusammenfassung:

Proposition: Für jedes $i = 1, 2$ sei V_i ein K-Vektorraum mit geordneter Basis $B_i = (b_{i,1}, \ldots, b_{i,n_i})$, sei U_i der von einem Anfangssegment $B_i' = (b_{i,1}, \ldots, b_{i,m_i})$ von B_i erzeugte Unterraum von V_i, und betrachte die induzierte geordnete Basis $B_i'' := (\bar{b}_{i,m_i+1}, \ldots, \bar{b}_{i,n_i})$ von V_i/U_i mit $\bar{b}_{i,j} := b_{i,j} + U_i$. Jede lineare Abbildung $f\colon V_1 \to V_2$ mit $f(U_1) \subset U_2$ induziert natürliche lineare Abbildungen

$$f'\colon U_1 \to U_2,\ u \mapsto f(u),$$

$$f''\colon V_1/U_1 \to V_2/U_2,\ v + U_1 \mapsto f(v) + U_2,$$

und die Darstellungsmatrix von f hat die Blockdreiecksgestalt

$$_{B_2}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} _{B_2'}[f']_{B_1'} & * \\ 0 & _{B_2''}[f'']_{B_1''} \end{pmatrix}.$$