Serie 11

Quotientenvektorraum, Determinante

1. Sei $U \subset V$ ein Unterraum, und sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit $U \subset \mathrm{Kern}(f)$. Betrachte die von der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraums induzierte lineare Abbildung $\overline{f}\colon V/U \to W$. Zeige:

   (a) $\mathrm{Kern}(\overline{f}) = \mathrm{Kern}(f)/U$.

   (b) $\overline{f}$ ist injektiv genau dann, wenn $U = \mathrm{Kern}(f)$ ist.

   (c) $\overline{f}$ ist surjektiv genau dann, wenn f surjektiv ist.

   (d) Ist f surjektiv, so induziert f einen Isomorphismus $V/\mathrm{Kern}(f) \xrightarrow{\sim} W$.

2. Zeige: Für jeden Unterraum V' mit $U \subset V' \subset V$ ist V'/U ein Unterraum von V/U. Jeder Unterraum von V/U hat diese Gestalt.

3. Für $i = 1, \ldots, n-1$ sei $\sigma_i \in S_n$ die Permutation, die i und $i+1$ vertauscht und alle übrigen Elemente von $\{1, \ldots, n\}$ festlässt, genannt *Nachbartransposition*. Zeige, dass jedes Element von S_n ein Produkt von Nachbartranspositionen ist.

4. Beweise die folgende Proposition aus der Zusammenfassung:

   Proposition: Für jede Blockdreiecksmatrix der Form
   $$A = \left(\begin{array}{c|c} A' & B \\ \hline O & A'' \end{array}\right) \quad \text{oder} \quad \left(\begin{array}{c|c} A' & O \\ \hline B' & A'' \end{array}\right)$$
   mit quadratischen Matrizen A' und A'' und der jeweiligen Nullmatrix O gilt
   $$\det(A) = \det(A') \cdot \det(A'').$$

5. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:
   $$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   $$C := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & -1 \\ -6 & 11 & -23 & -14 & 9 \end{pmatrix}.$$

6. Berechne in Abhängigkeit von a, b, c, d, e die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a & a \\ a & b & b & b & b \\ a & b & c & c & c \\ a & b & c & d & d \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$$

7. Für a und b in einem Körper K und $n \geqslant 1$ betrachte die $(n \times n)$-Matrix

$$A_n \;:=\; \begin{pmatrix} b & a & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & b \end{pmatrix}.$$

Beweise:

$$\det(A_n) = \big(b + (n-1)a\big) \cdot (b-a)^{n-1}.$$

*8. Die Zahlen 2014, 1484, 3710 und 6996 sind alle durch 106 teilbar. Zeige ohne zu rechnen, dass auch

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

durch 106 teilbar ist.