Serie 12

Determinante, Ähnlichkeit und Polynome

1. Berechne die Determinante der 175×175-Matrix $C := (c_{kl})_{k,l=1,\ldots,175}$ mit

$$c_{kl} \;:=\; \begin{cases} k^2+1 & \text{falls } k = l \\ kl & \text{falls } k \neq l \end{cases}.$$

*2. Seien x_i und y_i Elemente eines Körpers mit $x_i \neq y_j$ für alle i, j; und sei

$$F_n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) \;:=\; \det\left(\left(\frac{1}{x_i-y_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}\right)$$

(a) Beweisen Sie für alle $n \geqslant 1$ die Rekursionsformel

$$F_n(x_1,\ldots,y_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(x_n-x_i)(y_i-y_n)}{\prod_{i=1}^{n}(x_i-y_n)\prod_{i=1}^{n-1}(x_n-y_i)} F_{n-1}(x_1,\ldots,y_{n-1}).$$

Hinweis: Subtrahieren Sie die letzte Spalte von jeder anderen Spalte. Subtrahieren Sie dann ein geeignetes Vielfache der letzten Zeile von jeder anderen Zeile.

(b) Leiten Sie daraus eine Formel für $F_n(x_1,\ldots,y_n)$ her.

(c) Zeigen Sie, dass mit $c_n := \prod_{i=1}^{n-1} i!$ gilt:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} = \frac{c_n^4}{c_{2n}}.$$

3. Seien A, B quadratische Matrizen der gleichen Grösse. Zeige, wenn A und B ähnlich sind, dann gilt $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(B)$. Zeige auch, dass die umgekehrte Implikation nicht gilt.

4. Betrachte $n \times n$-Matrizen A und B über K.

(a) Zeige: Ist A oder B invertierbar, so sind AB und BA ähnlich.

*(b) Gilt die Folgerung auch ohne die Bedingung in (a)?

5. Sei $K[X]^{\leqslant n}$ der Raum der Polynome über einem Körper K vom Grad $\leqslant n$ und seien $x_1, \ldots, x_{n+1}$ paarweise verschiedene Elemente in K. Zeige, dass die Abbildung

$$\Phi : K[X]^{\leqslant n} \to K^{n+1},\ P(X) \to \big(P(x_1), \ldots, P(x_{n+1})\big)$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

6. (a) Betrachte ein Polynom $F(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ mit $a_n \neq 0$. Zeige: Für jede Nullstelle $\frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$ von F mit teilerfremden $b, c \in \mathbb{Z}$ gilt $b|a_0$ und $c|a_n$.
   (b) Finde alle Nullstellen in $\mathbb{Q}$ des Polynoms $P(X) := 2X^3 + 9X^2 + 7X - 6 \in \mathbb{Q}[X]$.

7. Führe in jedem der folgenden Fälle die *Polynomdivision mit Rest* aus, das heisst, bestimme die eindeutigen Polynome $Q,\ R \in K[X]$ mit $\deg(R) < \deg(G)$ und $F = Q \cdot G + R$.
   (a) $F = X^5 + 1$ und $G = X^2 + 2$ über $K = \mathbb{Q}$.
   (b) $F = 2X^5 + X^4 - 4X^3 + 12X^2 + X + 1$ und $G = X^3 - 2X + 7$ über $K = \mathbb{Q}$.
   (c) $F = 2X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 1$ und $G = 2X^2 + 1$ über $K = \mathbb{F}_3$.

8. Sei R ein kommutativer unitärer Ring. Zeige:
   (a) Ist R endlich, so existiert ein von Null verschiedenes Polynom $P \in R[X]$ mit $P(r) = 0$ für alle $r \in R$.
   *(b) Die umgekehrte Implikation gilt im Allgemeinen nicht, das heisst, es existiert ein unendlicher kommutativer unitärer Ring R und ein von Null verschiedenes Polynom $P \in R[X]$ mit $P(r) = 0$ für alle $r \in R$.
   (*Hinweis:* Für jeden $\mathbb{F}_2$-Vektorraum V versehe $R := \mathbb{F}_2 \oplus V$ mit der Multiplikation $(\alpha, v) \cdot (\beta, w) := (\alpha\beta, \alpha w + \beta v)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_2$ und $v, w \in V$.)