D-MATH Lineare Algebra I HS 2021
Prof. Richard Pink

Serie 13

Polynome, charakteristisches Polynom, Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit

1. Faktorisiere die folgenden Polynome so weit wie möglich:

   (a) $F_1(X) := X^5 - X$ in $\mathbb{R}[X]$ und $\mathbb{C}[X]$.

   (b) $F_2(X) := X^4 + X^3 + X - 1$ in $\mathbb{R}[X]$ und $\mathbb{C}[X]$.
   (Hinweis: Rate eine komplexe Nullstelle)

   (c) $F_3(X) := X^5 + 9X^4 + 31X^3 + 53X^2 + 48X + 18$ in $\mathbb{Q}[X]$.
   (Hinweis: Finde alle Nullstellen in $\mathbb{Q}$)

   Zusatzaufgabe: Tue jeweils dasselbe in $\mathbb{F}_5[X]$.

2. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$.

   (a) Bestimme das charakteristische Polynom von A.

   (b) Bestimme die Eigenwerte von A.

   (c) Bestimme die arithmetischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte.

*3. Für eine beliebige invertierbare $n \times n$-Matrix A drücke das charakteristische Polynom von A^{-1} in Termen des charakteristischen Polynoms von A aus.

4. Wie früher sei $F := K^{\mathbb{Z}^{\geqslant 0}}$ der Raum aller unendlichen Folgen in K, und sei $F_0 := K^{(\mathbb{Z}^{\geqslant 0})}$ der Unterraum aller Folgen, die schliesslich Null werden.

   (a) Finde alle Eigenwerte und Eigenvektoren des Endomorphismus
   $$T : F \to F,\ (x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

   (b) Tue dasselbe für den induzierten Endomorphismus $F_0 \to F_0$.

   (c) Konstruiere einen Endomorphismus von F_0 mit den Eigenwerten $0, 1, 2, 3, \ldots$

   (d) Konstruiere einen Endomorphismus von F_0, der keine Eigenwerte besitzt.

5. Sei A eine *nilpotente* $n \times n$-Matrix, das heisst eine, für die ein $m \geqslant 1$ existiert mit $A^m = O$. Zeige, dass der einzige mögliche Eigenwert von A gleich 0 ist. Wann genau ist 0 ein Eigenwert von A?

*6. Seien V ein K-Vektorraum und $F, G \in \mathrm{End}(V)$. Zeige:

(a) Falls $v \in V$ ein Eigenvektor von $F \circ G$ zum Eigenwert λ ist und $G(v) \neq 0$, dann ist $G(v)$ ein Eigenvektor von $G \circ F$ zum Eigenwert λ.

(b) Ist V endlichdimensional, so haben $F \circ G$ und $G \circ F$ die gleichen Eigenwerte.

(c) Gib ein Gegenbeispiel zu (b) an, falls V nicht endlichdimensional ist.

7. Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ und überprüfe, ob die Matrizen diagonalisierbar sind.

(a) $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C := \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 & -7 \\ -3 & -1 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$