Serie 14

Diagonalisierbarkeit, Triagonalisierbarkeit und Nilpotente Endomorphismen

1. (a) Seien A, B zwei $n \times n$-Matrizen, die kommutieren, das heisst, für welche gilt:

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

Sei λ ein Eigenwert von B der geometrischen Multiplizität 1. Zeige, dass jeder Eigenvektor von B zum Eigenwert λ auch ein Eigenvektor von A ist.

(b) Sei P_σ die Permutationsmatrix zu der Permutation $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(n) = 1$ und $\sigma(i) = i + 1$ für alle $1 \leqslant i < n$. Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{C}$ mit

$$P_\sigma A P_\sigma^{-1} = A.$$

Zeige, dass A diagonalisierbar ist.
(*Hinweis:* Untersuche die Eigenwerte von P_σ und wende (a) an.)

2. (a) Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, und sei $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ mit f-invarianten Unterräumen V_i. Zeige, dass die arithmetische bzw. geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts $\lambda \in K$ von f gleich der Summe der arithmetischen bzw. geometrischen Vielfachheiten von λ als Eigenwert der Endomorphismen $f|V_i$ von V_i ist.

(b) Folgere, dass f diagonalisierbar ist genau dann, wenn $f|V_i$ diagonalisierbar ist für jedes i.

(c) Seien f und g Endomorphismen desselben endlich-dimensionalen Vektorraums V. Zeige, dass f und g *simultan diagonalisierbar* sind (das heisst, dass eine Basis aus simultanen Eigenvektoren für f und g existiert) genau dann, wenn sie miteinander kommutieren und separat diagonalisierbar sind.

3. Trigonalisiere die folgenden reellen Matrizen zu einer oberen Dreiecksmatrix:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} -5 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Bestimme die Jordansche Normalform und eine zugehörige Basiswechselmatrix der folgenden reellen Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Eine Matrix A heisst *nilpotent*, falls $A^p = O$ ist für ein $p \geqslant 1$. Seien A und B zwei nilpotente $n \times n$-Matrizen mit $AB = BA$. Zeige, dass $A + B$ und AB nilpotent sind.

*6. Ein Endomorphismus der Form $\mathrm{id}_V + n$ für einen nilpotenten Endomorphismus n heisst *unipotent*. Analog für quadratische Matrizen. Sei $\mathbb{Q} \subset K$. Zeige:

(a) Für jeden nilpotenten Endomorphismus n ist

$$\exp(n) := {\sum_{m \geqslant 0}}' \frac{n^m}{m!}$$

wohldefiniert und unipotent.

(b) Für jeden unipotenten Endomorphismus u ist

$$\log(u) := {\sum_{k \geqslant 1}}' (-1)^{k-1} \frac{(u - \mathrm{id}_V)^k}{k}$$

wohldefiniert und nilpotent.

(c) Für jeden unipotenten Endomorphismus u gilt $\exp(\log(u)) = u$.

(d) Für jeden nilpotenten Endomorphismus n gilt $\log(\exp(n)) = n$.