D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2021
Prof. Richard Pink

Single Choice Aufgaben 7

Erzeugendensysteme, Lineare Unabhängigkeit & Basen

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Seien V ein Vektorraum und S ein Erzeugendensystem von V. Dann gilt immer:
   (a) Jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Vektoren aus S.
   (b) Jedes $v \in V$ ist eine eindeutige Linearkombination von Vektoren aus S.
   (c) S ist ein Unterraum von V.
   (d) $S = V$

2. Sei V ein Vektorraum der Dimension 2 über K, und sei $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von V. Für welche Werte von $\lambda \in K$ ist auch $\{v_1, v_1 + \lambda \cdot v_2\}$ eine Basis von V?
   (a) Für alle $\lambda \in K$.
   (b) Die Antwort hängt von den gewählten Vektoren v_1, v_2 ab.
   (c) Nur für $\lambda = 0$.
   (d) Für alle von 0 verschiedenen $\lambda \in K$.

3. Sei V ein Vektorraum und $v_1, v_2 \in V$ zwei linear unabhängige Vektoren. Sei $v_3 \in V$ ein dritter Vektor. Welche Aussage ist im Allgemeinen wahr?
   (a) Falls v_1, v_3 linear unabhängig sind und v_2, v_3 linear unabhängig sind, so sind auch v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.
   (b) Falls v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, so sind auch v_1, v_3 linear unabhängig.
   (c) Falls $v_3 \neq 0$ ist, dann sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.
   (d) Keine der oberen.

4. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$?
   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$
   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

5. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?
   (a) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
   (b) Der Nullvektor ist nie Teil einer Basis.
   (c) Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.
   (d) Jeder Vektorraum besitzt mindestens zwei verschiedene Basen.