Single Choice Aufgaben 8

Dimension, Komplemente & Lineare Abbildungen

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Sei V ein Vektorraum. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?
   (a) Für jedes Erzeugendensystem S von V gilt $\dim_K(V) \leqslant |S|$.
   (b) Für jede linear unabhängige Teilmenge S von V gilt $|S| \leqslant \dim_K(V)$.
   (c) Es gilt $\dim_K(V) = |V|$.
   (d) Für jede Teilmenge $S \subset V$ gilt $\dim_K(\langle S \rangle) \leqslant \dim_K(V)$.

2. Welche Aussage gilt für alle Unterräume U und V der Dimension 2 von $\mathbb{R}^3$?
   (a) $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 1$
   (b) $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 2$
   (c) $1 \leqslant \dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) \leqslant 2$
   (d) $\dim_{\mathbb{R}}(U + V) = 3$

3. Sei V ein Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?
   (a) U besitzt ein Komplement in V.
   (b) Sei W ein Komplement von U. Dann ist U ein Komplement von W.
   (c) Für jedes Komplement W von U und jedes Komplement U' von W ist $U' = U$.
   (d) Jedes Komplement W von U hat Dimension $\dim_K(W)$, für die $\dim_K(W) + \dim_K(U) = \dim_K(V)$ gilt.

4. Sei der Unterraum $U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ von $\mathbb{R}^3$ gegeben. Welcher der folgenden Unterräume ist ein Komplement von U in $\mathbb{R}^3$?
   (a) $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
   (b) $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
   (c) $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$
   (d) $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

5. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen V und W. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?
   (a) Für alle $v, v' \in V$ und $a \in K$ ist $f(v + av') = f(v) + af(v')$.
   (b) Es gilt $f(0) = 0$.
   (c) Für alle linear abhängigen Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ sind auch die Bilder $f(v_1), \ldots, f(v_n) \in W$ linear abhängig.
   (d) Es gilt $\dim_K(V) = \dim_K(W)$.