

Single Choice Aufgaben 11

DUALRAUM, QUOTIENTENVEKTORRAUM

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen.
Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Betrachte den Raum der Spaltenvektoren $V := K^n$ und die Abbildung

$$\varphi: V \rightarrow V^\vee = \text{Hom}_K(V, K), \quad v \mapsto (w \mapsto v^T \cdot w).$$

Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

- (a) Diese Abbildung ist wohldefiniert.
 - (b) Diese Abbildung ist linear.
 - (c) Diese Abbildung ist ein Isomorphismus.
 - (d) Für jede geordnete Basis (b_1, \dots, b_n) von V ist die duale Basis $(\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n))$.
2. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch für Vektorräume V und W ?
- (a) Jede lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ induziert eine lineare Abbildung $f^\vee: W^\vee \rightarrow V^\vee$.
 - (b) Es gibt eine natürliche Abbildung $\text{Hom}_K(V, W) \rightarrow \text{Hom}_K(V^\vee, W^\vee)$, $f \mapsto f^\vee$.
 - (c) Jedes $v \in V$ induziert eine lineare Abbildung $\text{Hom}_K(V, W) \rightarrow W$, $f \mapsto f(v)$.
 - (d) Jedes $\ell \in W^\vee$ induziert eine Abbildung $\text{Hom}_K(V, W) \rightarrow V^\vee$, $f \mapsto \ell \circ f$.

3. Welche Aussage gilt für jeden Vektorraum V und jeden Unterraum U ?

- (a) $\dim_K(V) = \dim_K(U) \cdot \dim_K(V/U)$.
- (b) U ist ein Unterraum von V/U .
- (c) Es gibt einen Isomorphismus $V \cong U \boxplus V/U$.
- (d) Für jeden Unterraum $U' \subset V$ mit $U + U' = V$ ist $U' \cong V/U$.

4. Sei \mathbb{F}_3 der Körper mit 3 Elementen und sei $W \subset \mathbb{F}_3^2$ der Unterraum $W := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Dann ist die Kardinalität von \mathbb{F}_3^2/W gleich

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 3
- (d) ∞

5. Welche Aussage gilt für alle Vektorräume V und W ?

- (a) Jede lineare Abbildung $\varphi: V \rightarrow W$ induziert einen Monomorphismus $V/\text{Kern}(\varphi) \rightarrow W$.
- (b) Jede lineare Abbildung $\varphi: W \rightarrow V$ induziert einen Epimorphismus $W \rightarrow V/\text{Bild}(\varphi)$.
- (c) Beide Aussagen sind richtig.
- (d) Keine der Aussagen ist richtig.