Musterlösung Single Choice Aufgaben 2

Prädikatenlogik, Relationen, Ringe

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Auswahlmöglichkeit richtig.

1. Sei X die leere Menge. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

   (a) Für jedes $x \in X$ existiert ein $y \in X$ mit $y = x$.

   (b) Für jede Menge Y gilt $X \subset Y$.

   (c) Für jede Menge Y gilt: Wenn $Y \in X$, dann $X \in Y$.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Für jede Menge Y gilt $X \in Y$.

   Erklärung: Aussagen (a) und (c) sind richtig, weil die Bedingungen $x \in X$ und $Y \in X$ nie erfüllt sind. Aussage (b) ist richtig, da die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist. Dagegen ist (d) falsch, zum Beispiel wenn Y die leere Menge ist.

2. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen richtig?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Für jede nicht leere Kneipe gibt es für jeden Zeitpunkt eine Person A in der Kneipe, so dass, wenn A trinkt, jeder in der Kneipe trinkt.

   (b) Für jede nicht leere Kneipe gibt es eine Person A in der Kneipe, so dass zu jedem Zeitpunkt, in dem A trinkt, jeder in der Kneipe trinkt.

   (c) Für jede Kneipe gibt es für jeden Zeitpunkt eine Person A in der Kneipe, so dass, wenn alle trinken, auch A trinkt.

   (d) Für jede nicht leere Kneipe gibt es für jeden Zeitpunkt eine Person A in der Kneipe, so dass A trinkt.

   Erklärung: Aussage (a) wird richtig, wenn wir für A eine Person wählen, die gerade nicht trinkt, beziehungsweise irgendeine, wenn es keine solche gibt. Aussage (b) wird zum Beispiel dann falsch, wenn zwei verschiedene Personen in der Kneipe sind, die jeweils genau abwechselnd trinken. Aussage (c) wird falsch, wenn die Kneipe leer ist, weil dann zwar alle (!) trinken, aber keine Person A darin ist, die trinkt. Aussage (d) ist falsch, wenn die Kneipe nicht leer ist und niemand trinkt.

3. Welche der folgenden Bedingungen ist nicht Teil der Axiome für eine Äquivalenzrelation R auf einer Menge X?

   (a) $\forall x \in X\colon\ x\,R\,x$

   (b) $\forall x, y \in X\colon\ x\,R\,y \ \to\ y\,R\,x$

   $\boxed{\text{(c)}}$ $\forall x, y \in X\colon\ x\,R\,y \vee y\,R\,x$

   (d) $\forall x, y, z \in X\colon\ (x\,R\,y \wedge y\,R\,z) \ \to\ x\,R\,z$

   Erklärung: Die Bedingungen (a) *reflexiv*, (b) *symmetrisch*, (d) *transitiv* zusammen definieren eine Äquivalenzrelation. Die Bedingung (c) *total* gehört nicht dazu.

4. Betrachte die Menge $X := \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a+b \leqslant 10\}$ mit der Partialordnung $(a,b) \preceq (a',b') \;\Leftrightarrow (a \leqslant a' \wedge b \leqslant b')$. Das Element $(8,2)$ ist ...

   (a) ... weder ein grösstes noch ein maximales Element.

   $\boxed{\text{(b)}}$ ... ein maximales, aber kein grösstes Element.

   (c) ... ein grösstes, aber kein maximales Element.

   (d) ... sowohl ein maximales als auch ein grösstes Element.

   Erklärung: Für jedes $(a,b) \in X$ mit $(8,2) \preceq (a,b)$ gilt $8 \leqslant a$ und $2 \leqslant b$. Wegen $a+b \leqslant 10$ folgt daraus $a \leqslant 10-b \leqslant 8$ und $b \leqslant 10-a \leqslant 2$. Insgesamt impliziert dies $(a,b)=(8,2)$. Daher ist $(8,2)$ ein maximales Element. Wegen $(8,2) \not\preceq (2,8)$ ist es aber kein grösstes Element. Somit ist (b) die einzige richtige Antwort.

5. Es seien Verknüpfungen $\oplus, \otimes\colon \mathbb{Z}^{\geqslant 0} \times \mathbb{Z}^{\geqslant 0} \to \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ durch $a \oplus b := \max\{a,b\}$ und $a \otimes b := a+b$ definiert. Welches der Ringaxiome ist für die Struktur $(\mathbb{Z}^{\geqslant 0}, \oplus, \otimes, 0, 0)$ verletzt?

   (a) Die Assoziativität der Addition.

   (b) Das neutrale Element der Multiplikation.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Das inverse Element der Addition.

   (d) Die Distributivität.

   Erklärung: Für das Element $x := 1$ existiert kein inverses Element der Addition, denn für alle $x' \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ gilt $x \oplus x' = \max\{1, x'\} \geqslant 1$ und daher $x \oplus x' \neq 0$. Daher ist (c) die richtige Antwort. Die Axiome in den übrigen Antworten sind dagegen erfüllt, wie man jeweils durch eine schnelle Rechnung überprüft.