Musterlösung Single Choice Aufgaben 3

Körper, Vollständige Induktion

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Auswahlmöglichkeit richtig.

1. Betrachte den Körper $\mathbb{F}_{13}$. Das multiplikative Inverse der Restklasse $\bar{8} \in \mathbb{F}_{13}$ ist

   (a) $\bar{2}$

   (b) $\bar{3}$

   (c) $\bar{4}$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $\bar{5}$

   Erklärung: Wir rechnen

$$\begin{aligned} \bar{2} \cdot \bar{8} &= \overline{16} &= \bar{3} \\ \bar{3} \cdot \bar{8} &= \overline{24} &= \overline{11} \\ \bar{4} \cdot \bar{8} &= \overline{32} &= \bar{6} \\ \bar{5} \cdot \bar{8} &= \overline{40} &= \bar{1}. \end{aligned}$$

2. Welcher der folgenden Ausdrücke ist in *jedem* Körper ungleich Null? Dabei bezeichnet 1_k das Einselement von k:

   $\boxed{\text{(a)}}$ $(2 \cdot 1_k)^3 - (3 \cdot 1_k)^2$

   (b) $(2 \cdot 1_k)^5 - 1_k - 1_k$

   (c) $6 \cdot 1_k - 10 \cdot 1_k$

   (d) $2021 \cdot 1_k$

   Erklärung: Wir vereinfachen

$$\begin{aligned} (2 \cdot 1_k)^3 - (3 \cdot 1_k)^2 &= 8 \cdot 1_k - 9 \cdot 1_k \;=\; -1_k, \\ (2 \cdot 1_k)^5 - 1_k - 1_k &= 32 \cdot 1_k - 1_k - 1_k \;=\; 30 \cdot 1_k, \\ 6 \cdot 1_k - 10 \cdot 1_k &= -4 \cdot 1_k, \\ 2021 \cdot 1_k &= 2021 \cdot 1_k. \end{aligned}$$

   Da 1_k ungleich Null ist, ist auch -1_k ungleich Null, und (a) ist richtig. Die übrigen Ausdrücke werden Null in dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ für jeden Primteiler p von 30, bzw. von 4, bzw. von 2021.

3. Betrachte eine Folge von Zahlen, die mit $2, 3, 5, 7, \ldots$ beginnt. Wie geht die Folge weiter?

   (a) $11, 13, 17, \ldots$

   (b) $10, 13, 16, \ldots$

   (c) $9, 11, 13, \ldots$

   $\boxed{\text{(d)}}$ Das kann man nicht sagen.

   Erklärung: Korrekt ist Antwort (d), denn es gibt unendlich viele Vorschriften für eine Folge, die mit $2, 3, 5, 7$ beginnt. Mathematik besteht gerade nicht im Raten!

4. Wir behaupten: Alle Pferde haben die gleiche Farbe. Wo steckt der Fehler im folgenden Beweis: Sei n die Anzahl Pferde.

   (a) Induktionsverankerung: Für $n = 1$ stimmt die Aussage.

   (b) Induktionsschritt $n - 1 \to n$: Wir nehmen eine Menge von $n > 1$ Pferden. Induktionsannahme: Die Aussage gilt für jede Teilmenge von $n - 1$ Pferden.

   (c) Wenn wir ein beliebiges Pferd herausnehmen, haben alle übrigen die gleiche Farbe.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Also haben sie auch insgesamt alle die gleiche Farbe.

   Erklärung: Die Schlussfolgerung in (d) ist nur für $n \geqslant 3$ richtig. Denn wenn man mindestens drei verschiedene Pferde a, b, c hat, kann man die Induktionsvoraussetzung auf die Menge ohne c anwenden und erhält, dass a und b dieselbe Farbe haben. Indem man a, b, c beliebig variiert, folgt die Behauptung. Für $n = 2$ geht dieses Argument aber schief. Somit ist die Aussage auch im allgemeinen Fall $n \geqslant 2$ nicht bewiesen, wo sie ja ohnehin absurd ist.

5. Welches ist keine gültige induktive Definition?

   (a) $A_0 := 3$ und $A_n := 2^{A_{n-1}} + 2$ für alle $n \geqslant 1$

   (b) $A_0 := 2$ und $A_1 := 3$ und $A_n := A_{n-2} \cdot A_{n-1}$ für alle $n \geqslant 2$

   $\boxed{\text{(c)}}$ $A_0 := 2$ und $A_n := (A_{n+1})^2$ für alle $n \geqslant 1$

   (d) $A_0 := 0$ und $A_2 := 1$ und $A_{2n} := A_{2n-4} + A_{2n-2}$ für alle $n \geqslant 2$

   Erklärung: (c) ist eine absteigende Induktion ohne Induktionsanfang.