# Musterlösung Single Choice Aufgaben 4

## Produkte, Matrizen

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Betrachte eine ganze Zahl $n > 0$ und Elemente $a_i$ eines Körpers für alle $0 \leqslant i \leqslant n$. Welche der folgenden Rechenregeln ist falsch?

   (a) $(\prod_{i=0}^n a_i)^2 = \prod_{i=0}^n a_i^2$

   (b) $\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{i=0}^r a_i + \sum_{j=r+1}^n a_j$ für $0 \leqslant r \leqslant n$

   (c) $\sum_{i=1}^0 a_i = 0$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $\prod_{i=0}^n (-a_i) = -\prod_{i=0}^n a_i$

   *Erklärung*: Die Gleichung in (d) ist falsch. Korrekt wäre $\prod_{i=0}^n (-a_i) = (-1)^{(n+1)} \prod_{i=0}^n a_i$.

2. Seien $A$ eine $n \times m$-Matrix und $B$ eine $m \times k$-Matrix und $C$ eine $k \times n$-Matrix. Welche Grösse hat die Matrix $A \cdot B \cdot C$?

   (a) Der Ausdruck ist nicht wohldefiniert.

   $\boxed{\text{(b)}}$ $n \times n$

   (c) $m \times k$

   (d) $n \times m$

   *Erklärung*: Nach Definition der Matrixmultiplikation ist $A \cdot B$ eine $n \times k$-Matrix und $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C$ eine $n \times n$-Matrix.

3. Was ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$?

   $\boxed{\text{(a)}}$ $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

   *Erklärung*: Direkte Rechnung.

4. Seien $A, B$ zwei quadratische Matrizen gleicher Grösse über einem Körper $K$ und sei $\mu \in K$. Welche Formel ist im allgemeinen falsch?

   (a) $A \cdot B = A \cdot (\mu \cdot B + (1 - \mu) \cdot B)$

   (b) $A + B = B + A$

$\boxed{\text{(c)}}$ $(A \cdot B)^2 = A^2 \cdot B^2$

(d) $\mu \cdot (A \cdot B) = (\mu \cdot A) \cdot B$

*Erklärung*: Die Formeln (a), (b) und (d) folgen direkt aus den Rechenregeln für Matrizen. Dass die Formel (c) falsch ist, liegt an der Nicht-Kommutativität der Matrixmultiplikation und kann mit folgendem Beispiel illustriert werden:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aber

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = O \cdot O = O.$$

5. Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ und $C := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Welche Multiplikation ist definiert?

(a) $A \cdot C$

(b) $A \cdot B$

$\boxed{\text{(c)}}$ $B \cdot A$

(d) $C \cdot A$

*Erklärung*: Bei einer Matrixmultiplikation muss immer die Anzahl der Spalten der linken Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der rechten Matrix sein. Dies ist nur beim Ausdruck (c) erfüllt.