Musterlösung Single Choice Aufgaben 6

Lineare Gleichungssysteme und Vektorräume

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Sei A eine $n \times n$-Matrix über einem Körper K und sei $b \in K^n$. Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $x \in K^n$. Was gilt im Allgemeinen?

   (a) Falls $b \neq 0$ ist, existiert keine Lösung.

   (b) Falls A nicht invertierbar ist, so existiert keine Lösung.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Falls A invertierbar ist, so existiert eine Lösung.

   (d) Falls eine Lösung existiert, so ist A invertierbar.

   Erklärung: Für A invertierbar ist $x = A^{-1}b$ eine Lösung; daher ist (c) richtig und (a) falsch. Für $b = 0$ und $A = O$ ist $x = 0$ eine Lösung, also sind (b) und (d) falsch.

2. Sei $(V, +, \cdot, 0)$ ein Vektorraum über einem Körper K. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Für alle $v \in V \setminus \{0\}$ und $a, b \in K$ gilt $av = bv \;\Rightarrow\; a = b$.

   (b) Für alle $v, w \in V$ und $a \in K \setminus \{0\}$ gilt $av = aw \;\Rightarrow\; v = w$.

   (c) $(V, +, 0)$ ist eine kommutative Gruppe.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Für alle $v, w \in V$ existiert ein $a \in K$ so dass $av = w$.

   Erklärung: Für linear unabhängige Vektoren wird (d) falsch. Dagegen ist (c) ein Axiom, und (b) folgt durch Multiplizieren mit a^{-1}. Schliesslich folgt (a) aus der Rechnung $(a - b)v = av - bv = 0 \Longrightarrow (a - b = 0 \;\vee\; v = 0)$.

3. Sei $(V, +, \cdot, 0)$ ein Vektorraum über einem Körper K. Seien $v, w \in V$ und $a, b \in K$. Welcher Ausdruck ergibt keinen Sinn?

   (a) $av - bw$

   $\boxed{\text{(b)}}$ avw

   (c) $a(v + w)$

   (d) abv

   Erklärung: Die Multiplikation ist nur definiert zwischen zwei Elementen aus K, beziehungsweise zwischen einem Element aus K und einem Element aus V. Das Produkt $a(vw)$ oder $(av)w$ ist daher nicht definiert.

4. Betrachte $\mathbb{R}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Welche Teilmenge ist ein $\mathbb{R}$-Unterraum?

   (a) $\varnothing$

   (b) $\mathbb{Z}$

   (c) $\mathbb{Q}$

   $\boxed{\text{(d)}}$ Keine der oberen

   Erklärung: Jeder Unterraum ist nicht-leer, also fällt (a) weg. Jeder Unterraum ist aber auch unter skalarer Multiplikation abgeschlossen, was (b) und (c) beide nicht erfüllen.

5. Betrachte $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Welche Teilmenge ist ein $\mathbb{Q}$-Unterraum?

   (a) $\varnothing$

   (b) $\mathbb{Z}$

   $\boxed{\text{(c)}}$ $\mathbb{Q}$

   (d) Keine der oberen

   Erklärung: Jeder Unterraum ist nicht-leer, also fällt (a) weg. Jeder Unterraum ist aber auch unter skalarer Multiplikation abgeschlossen, was (b) nicht erfüllt. Im Gegensatz zur vorigen Aufgabe ist jetzt $\mathbb{Q}$ unter skalarer Multiplikation abgeschlossen und unter Addition sowieso. Deshalb ist $\mathbb{Q}$ ein $\mathbb{Q}$-Unterraum von $\mathbb{R}$.