# Musterlösung Single Choice Aufgaben 7

## Erzeugendensysteme, Lineare Unabhängigkeit & Basen

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Seien $V$ ein Vektorraum und $S$ ein Erzeugendensystem von $V$. Dann gilt immer:

   $\boxed{\text{(a)}}$ Jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Vektoren aus $S$.

   (b) Jedes $v \in V$ ist eine eindeutige Linearkombination von Vektoren aus $S$.

   (c) $S$ ist ein Unterraum von $V$.

   (d) $S = V$

   *Erklärung*: (a) ist äquivalent zur Definition von Erzeugendensystem. Die Eindeutigkeit gilt nur für linear unabhängige Erzeugendensysteme.

2. Sei $V$ ein Vektorraum der Dimension 2 über $K$, und sei $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von $V$. Für welche Werte von $\lambda \in K$ ist auch $\{v_1, v_1 + \lambda \cdot v_2\}$ eine Basis von $V$?

   (a) Für alle $\lambda \in K$.

   (b) Die Antwort hängt von den gewählten Vektoren $v_1, v_2$ ab.

   (c) Nur für $\lambda = 0$.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Für alle von 0 verschiedenen $\lambda \in K$.

   *Erklärung*: Für $\lambda = 0$ hat die Menge $\{v_1, v_1 + 0 \cdot v_2\} = \{v_1\}$ nur ein Element, kann also keine Basis des zweidimensionalen Raums $V$ sein. Deshalb sind (c) und (a) falsch. Für $\lambda \neq 0$ enthält das Erzeugnis $\langle v_1, v_1 + \lambda \cdot v_2 \rangle$ zusätzlich zu dem Vektor $v_1$ auch den Vektor $\lambda^{-1} \cdot \big((v_1 + \lambda \cdot v_2) - v_1\big) = v_2$. Damit enthält es auch jede Linearkombination von $v_1$ und $v_2$ und ist daher ganz $V$. Somit ist $\{v_1, v_1 + \lambda \cdot v_2\}$ ein Erzeugendensystem von $V$ und wegen $\dim(V) = 2$ dann sogar eine Basis. Also ist (d) die richtige Antwort.

3. Sei $V$ ein Vektorraum und $v_1, v_2 \in V$ zwei linear unabhängige Vektoren. Sei $v_3 \in V$ ein dritter Vektor. Welche Aussage ist im Allgemeinen wahr?

   (a) Falls $v_1, v_3$ linear unabhängig sind und $v_2, v_3$ linear unabhängig sind, so sind auch $v_1, v_2, v_3$ linear unabhängig.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Falls $v_1, v_2, v_3$ linear unabhängig sind, so sind auch $v_1, v_3$ linear unabhängig.

   (c) Falls $v_3 \neq 0$ ist, dann sind $v_1, v_2, v_3$ linear unabhängig.

   (d) Keine der oberen.

   *Erklärung*: (b) ist richtig, denn eine nicht-triviale Linearkombination von $v_1$ und $v_3$ ist auch eine nicht-triviale Linearkombination von $v_1, v_2, v_3$. Dagegen sind (a) und (c) falsch, zum Beispiel wenn $v_3 = v_1 + v_2$ ist.

4. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

   $\boxed{\text{(a)}}$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

   *Erklärung*: Eine Basis ist eine linear unabhängige Teilmenge, die zugleich ein Erzeugendensystem ist. Wegen linearer Abhängigkeit sind die Mengen in (b) und (d) keine Basen. Die Menge in (c) ist kein Erzeugendensystem. Dass die Vektoren in (a) linear unabhängig sind, kann man mittels Gaussverfahren überprüfen. Sie müssen dann eine Basis bilden, weil die Dimension von $\mathbb{R}^3$ auch 3 ist.

5. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

   (a) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

   (b) Der Nullvektor ist nie Teil einer Basis.

   (c) Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Jeder Vektorraum besitzt mindestens zwei verschiedene Basen.

   *Erklärung*: Der Nullvektorraum besitzt nur eine Basis, nämlich $\varnothing$. Aber auch der Vektorraum $\mathbb{F}_2$ über dem Körper $\mathbb{F}_2$ besitzt nur eine Basis, nämlich 1.