Musterlösung Single Choice Aufgaben 8

Dimension, Komplemente & Lineare Abbildungen

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Sei V ein Vektorraum. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Für jedes Erzeugendensystem S von V gilt $\dim_K(V) \leqslant |S|$.

   (b) Für jede linear unabhängige Teilmenge S von V gilt $|S| \leqslant \dim_K(V)$.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Es gilt $\dim_K(V) = |V|$.

   (d) Für jede Teilmenge $S \subset V$ gilt $\dim_K(\langle S \rangle) \leqslant \dim_K(V)$.

   Erklärung: Für jeden Körper K ist $\dim_K(K) = 1$, aber $|K| \geqslant 2$; darum ist (c) falsch. Die übrigen Aussagen folgen aus grundlegenden Sätzen der Vorlesung.

2. Welche Aussage gilt für alle Unterräume U und V der Dimension 2 von $\mathbb{R}^3$?

   (a) $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 1$

   (b) $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 2$

   $\boxed{\text{(c)}}$ $1 \leqslant \dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) \leqslant 2$

   (d) $\dim_{\mathbb{R}}(U + V) = 3$

   Erklärung: Aus dem Dimensionssatz ergibt sich $\dim_{\mathbb{R}}(U + V) + \dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = \dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(V) = 2 + 2 = 4$. Zudem ist $U + V$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ und hat damit Dimension $\leqslant 3$. Zusätzlich ist aber $U \cap V$ ein Unterraum von U und hat daher Dimension $\leqslant 2$. Daraus folgen die Möglichkeiten $\dim_{\mathbb{R}}(U + V) = 2$ und $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 2$ oder $\dim_{\mathbb{R}}(U + V) = 3$ und $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 1$. Beide Möglichkeiten können vorkommen, nämlich der erste Fall, wenn $U = V$ ist und der zweite Fall, wenn U ein Komplement von V enthält.

3. Sei V ein Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) U besitzt ein Komplement in V.

   (b) Sei W ein Komplement von U. Dann ist U ein Komplement von W.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Für jedes Komplement W von U und jedes Komplement U' von W ist $U' = U$.

   (d) Jedes Komplement W von U hat Dimension $\dim_K(W)$, für die $\dim_K(W) + \dim_K(U) = \dim_K(V)$ gilt.

   Erklärung: Im Allgemeinen ist ein Komplement eines Unterraumes alles andere als eindeutig. Ein Beispiel ist $V := \mathbb{R}^2$ und $U := \langle \binom{1}{0} \rangle$ und $W := \langle \binom{0}{1} \rangle$. Dann ist $U' := \langle \binom{1}{1} \rangle$ ein Komplement von W, aber $U \neq U'$. Tatsächlich ist sogar U' ein Komplement von U.

4. Sei der Unterraum $U := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ von $\mathbb{R}^3$ gegeben. Welcher der folgenden Unterräume ist ein Komplement von U in $\mathbb{R}^3$?

(a) $\langle \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) \rangle$

(b) $\langle \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) \rangle$

(c) $\langle \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\2\end{smallmatrix}\right) \rangle$

$\boxed{\text{(d)}}$ $\langle \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) \rangle$

Erklärung: Ein Komplement von U muss Dimension $\dim(\mathbb{R}^3) - \dim(U) = 3 - 1 = 2$ haben; damit fällt (b) schon weg. Sowohl (a) wie auch (c) hat einen nichttrivialen Durchschnitt mit U und kann daher kein Komplement sein. Dagegen überprüft man direkt, dass die Vektoren in (d) zusammen mit dem Erzeuger von U eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden; daher ist (d) richtig.

5. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen V und W. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

(a) Für alle $v, v' \in V$ und $a \in K$ ist $f(v + av') = f(v) + af(v')$.

(b) Es gilt $f(0) = 0$.

(c) Für alle linear abhängigen Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ sind auch die Bilder $f(v_1), \ldots, f(v_n) \in W$ linear abhängig.

$\boxed{\text{(d)}}$ Es gilt $\dim_K(V) = \dim_K(W)$.

Erklärung: Zwischen je zwei Vektorräumen, also auch solchen verschiedener Dimensionen, existiert die Nullabbildung und diese ist linear. Daher ist (d) falsch. Die Aussagen (a) und (b) folgen aus der Definition von linearer Abbildung. Dass die Aussage (c) richtig ist, folgt daraus, dass eine nicht-triviale Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ durch Anwendung von f zu einer nicht-trivialen Linearkombination von $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ wird.