Musterlösung Single Choice Aufgaben 9

Lineare Abbildungen, Kern und Bild

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ ist linear genau dann, wenn...

   (a) $a = 0$ ist.

   $\boxed{\text{(b)}}$ $b = 0$ ist.

   (c) $a = 0$ und $b = 0$ ist.

   (d) $a = b$ ist.

   Erklärung: Jede lineare Abbildung erfüllt $f(0) = 0$, daher sind (a) und (d) falsch. Da die Multiplikation mit einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ eine lineare Funktion ist, kann im Allgemeinen auch $a \neq 0$ sein, daher ist nur (b) richtig.

2. Seien V und W Vektorräume. Welche der folgenden Aussagen gilt für jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$?

   (a) Die Einschränkung $f|_{\mathrm{Kern}(f)}\colon \mathrm{Kern}(f) \to W$ ist injektiv.

   (b) Die Einschränkung $f|_{\mathrm{Kern}(f)}\colon \mathrm{Kern}(f) \to W$ ist surjektiv.

   (c) Die induzierte Abbildung $f\colon V \to \mathrm{Bild}(f)$ ist injektiv.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Die induzierte Abbildung $f\colon V \to \mathrm{Bild}(f)$ ist surjektiv.

   Erklärung: Die Aussage (d) folgt direkt aus der Definition von $\mathrm{Bild}(f)$. Jede lineare Abbildung, die weder surjektiv noch injektiv ist, dient als Gegenbeispiel für (a), (b) und (c).

3. Seien $f, g\colon V \to V$ zwei Endomorphismen eines Vektorraumes V. Dann gilt im Allgemeinen

   (a) $\mathrm{Kern}(f + g) = \mathrm{Kern}(f) + \mathrm{Kern}(g)$

   (b) $\mathrm{Bild}(f + g) = \mathrm{Bild}(f) + \mathrm{Bild}(g)$

   (c) $\mathrm{Bild}(f \circ g) = \mathrm{Bild}(f)$

   $\boxed{\text{(d)}}$ Keine der oberen Gleichungen.

   Erklärung: Sowohl (a) als auch (b) sind falsch, falls $f = \mathrm{id}_V$ und $g = -\mathrm{id}_V$ und $V \neq 0$ ist. Falls g die Nullabbildung und $f = \mathrm{id}_V$ sowie $V \neq 0$ ist, ist (c) falsch.

4. Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Falls $\mathrm{Bild}(f)$ eine Basis von W enthält, ist f ein Epimorphismus.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Falls $\mathrm{Kern}(f)$ eine Basis von V enthält, ist f ein Monomorphismus.

   (c) Falls $V = W$ ist, ist f ein Endomorphismus.

(d) Falls f sowohl ein Mono- als auch ein Epimorphismus ist, ist f ein Isomorphismus.

Erklärung: Falls $\mathrm{Bild}(f)$ eine Basis von W enthält, so ist $\mathrm{Bild}(f) = \langle \mathrm{Bild}(f) \rangle = V$ und somit f surjektiv. Also ist (a) richtig. Sodann ist (c) gerade die Definition eines Endomorphismus. Auch (d) ist richtig, da eine Abbildung genau dann bijektiv ist, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Dagegen ist (b) falsch: Falls $\mathrm{Kern}(f)$ eine Basis von V enthält, ist f die Nullabbildung und daher nicht injektiv, es sei denn V ist der Nullraum.

5. Die lineare Abbildung $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (3x + z, y)$ ist ein

(a) Isomorphismus.

(b) Endomorphismus.

$\boxed{\text{(c)}}$ Epimorphismus.

(d) Monomorphismus.

Erklärung: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $f(0, b, a) = (a, b)$, also ist f surjektiv und (c) richtig.