Musterlösung Single Choice Aufgaben 10

Darstellungsmatrizen, Rang, Dualraum

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Die Basiswechselmatrix ist die Darstellungsmatrix der Identitätsabbildung bezüglich der entsprechenden Basen.

   (b) Jeder endlich dimensionale Vektorraum ist isomorph zu K^n für ein $n \geqslant 0$.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Der Rang jeder linearen Abbildung $f\colon K^n \to K^m$ ist mindestens $\min\{n, m\}$.

   (d) Die Darstellungsmatrix eines Isomorphismus ist invertierbar.

   Erklärung: Der Rang jeder linearen Abbildung $f\colon K^n \to K^m$ ist immer *höchstens* $\min\{n, m\}$; kann aber zum Beispiel auch 0 sein, darum ist (c) falsch.

2. Betrachte $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen reellen Vektorraum mit der geordneten Basis $\mathcal{B} := (1, i)$. Die Matrix ${}_{\mathcal{B}}[\ldots]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist die Darstellungsmatrix bezüglich $\mathcal{B}$ der folgenden linearen Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

   (a) Die komplexe Konjugation $z \mapsto \bar{z}$

   (b) $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$

   (c) $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $z \mapsto iz$

   Erklärung: Ein Element $a+ib \in \mathbb{C}$ wird in der Basis $\mathcal{B}$ durch den Spaltenvektor $\binom{a}{b}$ dargestellt. Dieser wird durch die Matrix ${}_{\mathcal{B}}[\ldots]_{\mathcal{B}}$ auf den Vektor $\binom{-b}{a}$ abgebildet, welcher das Element $-b + ia = i(a + ib)$ darstellt.

3. Der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$ ist

   (a) 0

   $\boxed{\text{(b)}}$ 1

   (c) 2

   (d) 3

   Erklärung: Die Spalten der Matrix sind zwar ungleich null, aber linear abhängig, weil die zweite das dreifache der ersten ist. Daher ist der Rang gleich 1.

4. Für jede $n \times m$-Matrix A und jede invertierbare $n \times n$-Matrix B gilt

   (a) $\mathrm{Rang}(BA) = \mathrm{Rang}(B) \cdot \mathrm{Rang}(A)$

   (b) $\mathrm{Rang}(BA) = \mathrm{Rang}(B) + \mathrm{Rang}(A)$

   $\boxed{\text{(c)}}$ $\mathrm{Rang}(BA) = \mathrm{Rang}(A)$

   (d) $\mathrm{Rang}(BA) = \mathrm{Rang}(B)$

   Erklärung: Laut einer Proposition aus der Vorlesung bleibt der Rang einer linearen Abbildung gleich, wenn man von links mit einem Isomorphismus verknüpft. In die Sprache der Matrizen übersetzt heisst das genau (c).

5. Welche der folgenden Aussagen ist richtig für alle endlich-dimensionalen Vektorräume V und W?

   (a) Für jeden Isomorphismus $T\colon V \xrightarrow{\sim} V^\vee$ und jede geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V ist $T(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^\vee$.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Falls V und W isomorph sind, so sind auch $V^\vee$ und $W^\vee$ isomorph.

   (c) Für jeden Monomorphismus $i\colon V \hookrightarrow W$ ist der duale Homomorphismus $i^\vee\colon W^\vee \to V^\vee$ ein Monomorphismus.

   (d) Die Dimension von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist $\dim_K(V) + \dim_K(W)$.

   Erklärung: Aussage (a) ist falsch, weil ein beliebiger Isomorphismus keinen Bezug zu gegebenen Basen haben muss. Dass (b) richtig ist, folgt aus den Isomorphismen $V^\vee \cong V \cong W \cong W^\vee$. Dafür ist (c) schon im Fall $V = \{0\} \neq W$ falsch, denn dann ist $V^\vee = \{0\} \neq W^\vee$ und es gibt gar keinen Monomorphismus $W^\vee \hookrightarrow V^\vee$. Schliesslich ist $\dim(\mathrm{Hom}_K(V, W)) = \dim_K(V) \cdot \dim_K(W)$ möglicherweise verschieden von $\dim_K(V) + \dim_K(W)$; also ist auch (d) falsch.