Musterlösung Single Choice Aufgaben 11

DUALRAUM, QUOTIENTENVEKTORRAUM

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Betrachte den Raum der Spaltenvektoren $V := K^n$ und die Abbildung

$$\varphi\colon V \to V^\vee = \mathrm{Hom}_K(V,K), \quad v \mapsto (w \mapsto v^T \cdot w).$$

Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

(a) Diese Abbildung ist wohldefiniert.

(b) Diese Abbildung ist linear.

(c) Diese Abbildung ist ein Isomorphismus.

$\boxed{\text{(d)}}$ Für jede geordnete Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von V ist die duale Basis $(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n))$.

Erklärung: Aussage (d) ist falsch. Denn die zu $(b_1, \ldots, b_n)$ duale Basis $(b_1^\vee, \ldots, b_n^\vee)$ ist charakterisiert durch die Gleichung $b_i^\vee(b_j) = \delta_{ij}$ für alle i, j. Also ist genau dann $(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n))$ die duale Basis, wenn $b_i^T \cdot b_j = \varphi(b_i)(b_j) = \delta_{ij}$ ist für alle i, j. Dies gilt zwar für die Standardbasis von K^n, aber nicht für eine beliebige Basis. Zum Beispiel nicht für die Basis $\left(\binom{1}{0}, \binom{1}{1}\right)$ von K^2 wegen $\binom{1}{1}^T \cdot \binom{1}{1} = 2$.

2. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch für Vektorräume V und W?

(a) Jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$ induziert eine lineare Abbildung $f^\vee\colon W^\vee \to V^\vee$.

$\boxed{\text{(b)}}$ Es gibt eine natürliche Abbildung $\mathrm{Hom}_K(V,W) \to \mathrm{Hom}_K(V^\vee, W^\vee)$, $f \mapsto f^\vee$.

(c) Jedes $v \in V$ induziert eine lineare Abbildung $\mathrm{Hom}_K(V,W) \to W$, $f \mapsto f(v)$.

(d) Jedes $\ell \in W^\vee$ induziert eine Abbildung $\mathrm{Hom}_K(V,W) \to V^\vee$, $f \mapsto \ell \circ f$.

Erklärung: (b) ist falsch, denn die zu $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ assoziierte duale Abbildung $f^\vee \in \mathrm{Hom}_K(W^\vee, V^\vee)$ geht in die andere Richtung.

3. Welche Aussage gilt für jeden Vektorraum V und jeden Unterraum U?

(a) $\dim_K(V) = \dim_K(U) \cdot \dim_K(V/U)$.

(b) U ist ein Unterraum von V/U.

$\boxed{\text{(c)}}$ Es gibt einen Isomorphismus $V \cong U \boxplus V/U$.

(d) Für jeden Unterraum $U' \subset V$ mit $U + U' = V$ ist $U' \cong V/U$.

Erklärung: Für jedes Komplement W von U in V ist $W \cong V/U$, weshalb (c) richtig ist. Dagegen ist (d) falsch, weil nicht $U \oplus U' = V$ vorausgesetzt ist. Auch in (a) steckt ein Fehler; auf der rechten Seite müsste die Summe stehen. Schliesslich ist (b) schon deshalb falsch, weil U keine Teilmenge von V/U ist.

4. Sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit 3 Elementen und sei $W \subset \mathbb{F}_3^2$ der Unterraum $W := \langle \binom{1}{1} \rangle$. Dann ist die Kardinalität von $\mathbb{F}_3^2/W$ gleich

   (a) 1

   (b) 2

   $\boxed{\text{(c)}}$ 3

   (d) ∞

   Erklärung: Aus der Dimensionsformel folgt, dass $\mathbb{F}_3^2/W$ ein eindimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F}_3$ ist und deshalb die Kardinalität 3 besitzt.

5. Welche Aussage gilt für alle Vektorräume V und W?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ induziert einen Monomorphismus $V/\operatorname{Kern}(\varphi) \to W$.

   (b) Jede lineare Abbildung $\varphi\colon W \to V$ induziert einen Epimorphismus $W \to V/\operatorname{Bild}(\varphi)$.

   (c) Beide Aussagen sind richtig.

   (d) Keine der Aussagen ist richtig.

   Erklärung: Die Aussage (a) folgt aus der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraumes. Die induzierte Abbildung in (b) ist immer die Nullabbildung, welche für eine nicht surjektive Abbildung φ nicht surjektiv ist.