Musterlösung Single Choice Aufgaben 12

Determinante und Ähnlichkeit

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 1$?

   (a) $x = -2$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $x = 2$

   (c) $x = -1$

   (d) $x = 1$

   Erklärung: Die Determinante der Matrix ist $(x-1)^2$, woraus Antwort (b) folgt.

2. Sei K ein Körper und $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ der Vektorraum der $n \times n$-Matrizen über K. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Eine Matrix A über K ist invertierbar genau dann wenn $\det(A) \neq 0$ ist.

   (b) Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix hängt nur von den Diagonaleinträgen ab.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Für jedes $n \geqslant 0$ ist die Determinante $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \to K$ eine lineare Abbildung.

   (d) Für jedes $n > 0$ ist die Determinantenabbildung $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \to K$ surjektiv.

   Erklärung: Die Determinante $\det(A)$ ist zwar linear in jeder einzelnen Zeile oder Spalte, wenn die übrigen Zeilen bzw. Spalten festgehalten werden, jedoch nicht linear in A selbst. Zum Beispiel gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, was im Allgemeinen verschieden von $\lambda \det(A)$ ist. Darum ist (c) falsch.

   Dafür wurden (a) und (b) in der Vorlesung bewiesen, und (c) gilt, da die Matrix, die aus der Einheitsmatrix entsteht, indem man den linken oberen Eintrag durch $\lambda \in K$ ersetzt, die Determinante λ hat.

3. Für jede reelle 2×2-Matrix A gilt:

   (a) $\mathrm{Kern}(L_A) = 0 \iff \det(A) = 0$

   (b) $\mathrm{Kern}(L_A) = 0 \iff \det(A) = 1$

   $\boxed{\text{(c)}}$ $\mathrm{Kern}(L_A) \neq 0 \iff \det(A) = 0$

   (d) $\mathrm{Kern}(L_A) = \mathbb{R}^2 \iff \det(A) = 0$

   Erklärung: Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ hat Determinante Null und einen eindimensionalen Kern. Dies zeigt, dass (a) und (d) falsch sind. Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ hat als Kern den Nullraum, aber als Determinante 2, was zeigt, dass (b) falsch ist. Die Aussage (c) ist richtig, denn es ist $\det(A) = 0$ genau dann, wenn A nicht invertierbar ist, und dies ist der Fall genau dann, wenn L_A nicht injektiv ist.

4. Unter welcher Operation bleibt die Determinante einer Matrix im Allgemeinen nicht gleich?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Vertauschen zweier Zeilen.

   (b) Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

   (c) Transponieren.

   (d) Ersetzen durch eine ähnliche Matrix.

   Erklärung: Das Vertauschen zweier Zeilen führt zu einer Umkehr des Vorzeichens der Determinante.

5. Seien A, B, C quadratische Matrizen der gleichen Grösse. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Falls A und die Einheitsmatrix I_n ähnlich sind, so gilt $A = I_n$.

   (b) Falls A und B ähnlich sind und B und C ähnlich sind, so sind auch A und C ähnlich.

   (c) Die Nullmatrix ist die einzige Matrix, die zur Nullmatrix ähnlich ist.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Falls $\det(A) = \det(B)$ ist, so sind A und B ähnlich.

   Erklärung: Die Aussage (a) ist korrekt, denn falls A zu I_n ähnlich ist, so existiert eine invertierbare Matrix U mit $A = UI_nU^{-1} = I_n$. Insbesondere ist zum Beispiel $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nicht ähnlich zu $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, obwohl sie beide Determinante 1 haben; darum ist Aussage (d) falsch. Dafür wurde (b) in der Vorlesung gezeigt, und (c) gilt wegen $UOU^{-1} = O$ für die Nullmatrix O.