# Musterlösung Single Choice Aufgaben 13

## Polynome, Eigenwerte, Eigenvektoren

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Seien $f, g \in K[X]$ zwei Polynome über einem Körper $K$. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Falls $f \cdot g$ eine Nullstelle besitzt, besitzt $f$ oder $g$ eine Nullstelle.

   (b) Falls $\deg(f) = 1$ ist, besitzt $f$ eine Nullstelle.

   (c) Falls $f$ irreduzibel vom Grad $\deg(f) > 1$ ist, besitzt $f$ keine Nullstelle.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Falls $f$ und $g$ genau die gleichen Nullstellen haben, gilt $f = g$.

   *Erklärung*: Aussage (d) ist falsch für $f(X) = X$ und $g(X) = X^2$.

2. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch für quadratische Matrizen?

   (a) Wenn 0 ein Eigenwert von $A$ ist, dann sind die Spalten von $A$ linear abhängig.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Jeder Vektor $v$ mit $Av = \lambda v$ für ein von Null verschiedenes $\lambda \in K$ ist ein Eigenvektor von $A$.

   (c) Wenn $\lambda$ ein Eigenwert von $A$ ist, dann ist der zu $\lambda$ gehörende Eigenraum genau die Menge aller Vektoren $v$, für welche $Av = \lambda \cdot v$ gilt.

   (d) Wenn $A$ nicht invertierbar ist, dann hat $A$ mindestens einen Eigenwert.

   *Erklärung*: Die Definition von Eigenvektoren verlangt $v \neq 0$, und nicht $\lambda \neq 0$; darum ist (b) falsch. Dagegen ist (c) genau die Definition des Eigenraums. Sodann ist 0 ein Eigenwert von $A$ genau dann, wenn $\mathrm{char}_A(0) = 0$ ist. Wegen $\mathrm{char}_A(0) = \pm\det(A)$ ist dies äquivalent zu $\det(A) = 0$. Darum sind (a) und (d) richtig.

3. Welche Aussage ist im Allgemeinen richtig für quadratische Matrizen?

   (a) Jede Matrix hat einen Eigenwert.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Ähnliche Matrizen haben die gleichen Eigenwerte.

   (c) Haben zwei Matrizen die gleichen Eigenwerte, so sind sie zueinander ähnlich.

   (d) Ähnliche Matrizen haben die gleichen Eigenvektoren.

   *Erklärung*: Als Gegenbeispiel zu (a) dient die $0 \times 0$-Matrix, aber auch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ über $\mathbb{R}$. Die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ haben beide nur den Eigenwert 1, sind aber nicht ähnlich zueinander, was ein Gegenbeispiel zu (c) ist. Seien $A$ und $B$ ähnliche Matrizen, also $A = U^{-1}BU$ mit einer invertierbaren Matrix $U$. Für jeden Eigenvektor $v$ von $A$ ist dann $Uv$ ein Eigenvektor von $B$ zum gleichen Eigenwert. Das zeigt, dass (b) richtig ist, aber (d) im Allgemeinen falsch.

4. Betrachte die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

   (a) Nur $v_1$ ist ein Eigenvektor von $A$.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Nur $v_2$ ist ein Eigenvektor von $A$.

   (c) $v_1$ und $v_2$ sind beides Eigenvektoren von $A$.

   (d) Weder $v_1$ noch $v_2$ sind Eigenvektoren von $A$.

   *Erklärung*: Es gilt $Av_2 = 2v_2$, aber $Av_1 = v_1 + v_2$, was kein Vielfaches von $v_1$ ist.

5. Sei $A$ eine quadratische Matrix über $K$. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Wenn $\lambda$ ein Eigenwert von $A$ ist, dann ist $\lambda - s$ ein Eigenwert von $A - s \cdot I$ für alle $s \in K$.

   (b) Die Diagonaleinträge einer Diagonalmatrix sind genau die Eigenwerte.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Wenn $v$ und $v'$ Eigenvektoren von $A$ sind, dann ist auch $v+v'$ ein Eigenvektor von $A$.

   (d) Wenn $\lambda$ ein Eigenwert von $A$ ist, dann ist $\lambda^n$ ein Eigenwert von $A^n$ für alle $n \geqslant 1$.

   *Erklärung*: Seien $v$ und $v'$ Eigenvektoren von $A$ zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda$ und $\lambda'$. Dann liegen $v$ und $v'$ in verschiedenen Eigenräumen und sind daher linear unabhängig. Ausserdem ist $A(v + v') = \lambda v + \lambda' v'$ wegen $\lambda \neq \lambda'$ kein skalares Vielfaches von $v + v'$. Darum ist (c) im Allgemeinen falsch.

   Dagegen folgt aus $Av = \lambda v$ auch $(A - s \cdot I)v = Av - sv = (\lambda - s)v$, also ist $v$ ein Eigenvektor von $A - s \cdot I$ zum Eigenwert $\lambda - s$ und (a) ist richtig. Analog folgt auch $A^n v = \lambda^n v$ für alle $n \geqslant 1$, also ist $v$ ein Eigenvektor von $A^n$ zum Eigenwert $\lambda^n$ und (d) ist richtig. Schliesslich ist (b) aus der Vorlesung bekannt.