D-MATH
Prof. Richard Pink

Lineare Algebra I

HS 2021

Wiederholungsserie

Wenn nichts anderes gesagt ist, sei K ein beliebiger Körper.

1. Ein Forscher besucht eine Insel, auf der, wie er weiss, zwei verschiedene Stämme Eingeborener wohnen: Die Angehörigen des einen Stammes sagen immer die Wahrheit, die Angehörigen des anderen Stammes lügen immer. Der Forscher will eine Schlucht auf der Insel erkunden, stösst aber auf dem Weg auf eine Gabelung, bei der er nicht weiss, ob er rechts oder links abbiegen soll, um zur Schlucht zu gelangen. Zum Glück kommt ihm ein Eingeborener entgegen, von dem er aber nicht weiss, welchem Stamm er angehört. Wie kann der Forscher mit nur einer einzigen Frage herausfinden, welche Richtung er einschlagen muss?

2. Prüfen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind:

   (a) Für alle $x \in \varnothing$ gilt $x \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$.

   (b) Für alle $x \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ gilt $x \in \varnothing$.

   (c) Für alle $x \in \varnothing$ existiert ein $y \in \varnothing$ sodass $(x, y) \in \varnothing$.

   (d) Für alle $x \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ existiert ein $y \in \varnothing$ sodass $(x, y) \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$.

   (e) Für alle $x \in \varnothing$ und für alle $y \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ gilt $\{x, y\} \nsubseteq \varnothing \cup \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$.

3. Sei A eine $n \times n$ Matrix über K mit der Eigenschaft $AX = XA$ für alle $n \times n$-Matrizen X über K. Zeige, dass ein $\lambda \in K$ existiert mit $A = \lambda I_n$.

4. Die *Spur* einer $n \times n$-Matrix $A = \big(a_{ij}\big)_{i,j}$ ist definiert als

   $$\operatorname{Spur}(A) \ := \ \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

   Zeige:

   (a) Für jede $m \times n$-Matrix A und jede $n \times m$-Matrix B gilt $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$.

   (b) Für jede invertierbare $n \times n$-Matrix U gilt $\operatorname{Spur}(UAU^{-1}) = \operatorname{Spur}(A)$.

   (c) Finde ein Gegenbeispiel zu der Aussage

   $$\operatorname{Spur}(ABC) = \operatorname{Spur}(ACB).$$

5. Berechne die LR-Zerlegung der Matrix

   $$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Zeigen Sie, dass die Menge

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

zusammen mit der Addition und Multiplikation von Matrizen sowie dem Nullelement $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und dem Einselement $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ein nichtkommutativer Schiefkörper ist.

(Dieser ist isomorph zu dem Ring der *Hamiltonschen Quaternionen.*)

7. Seien n und m natürliche Zahlen und A eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Zeige, dass Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in K^n$ linear unabhängig sind genau dann, wenn $Av_1, \ldots, Av_m$ linear unabhängig sind.

8. Prüfe, ob die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

9. Beweise oder widerlege: Für beliebige linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ eines Vektorraumes V und einen beliebigen Vektor $w \in V$ sind die Vektoren $v_1 + w, \ldots, v_n + w$ linear abhängig genau dann, wenn $w \in \langle\{v_1, \ldots, v_n\}\rangle$ ist.

10. Seien U, V zwei 5-dimensionale Untervektorräume von K^9. Zeige, dass $U \cap V \neq \{0\}$ ist.

11. Für welche natürlichen Zahlen m existiert ein K-Vektorraum V mit m verschiedenen Unterräumen $V_1, \ldots, V_m$, so dass für alle $i < j$ der Unterraum V_i ein Komplement von V_j ist?

12. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellwertigen Folgen:

$$V := \big\{ (x_i)_{i \geqslant 1} \;\big|\; x_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \geqslant 1 \big\}.$$

Sei P_1 die Menge aller schliesslich polynomialen Folgen, das heisst, sei

$$P_1 := \big\{ (x_i)_{i \geqslant 1} \in V \;\big|\; \exists N \geqslant 1,\ \exists \text{ Polynom } P(x) \text{ sodass } \forall i \geqslant N : x_i = P(i) \big\},$$

und sei P_2 die Menge aller periodischen Folgen, das heisst, sei

$$P_2 := \big\{ (x_i)_{i \geqslant 1} \in V \;\big|\; \exists m \geqslant 1 \text{ sodass } \forall i \geqslant 1 : x_{i+m} = x_i \big\}.$$

Zeige, dass P_1 und P_2 Untervektorräume von V sind.

13. Schreibe die lineare Abbildung $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^5$,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1+x_2+3x_3 \\ 2x_1+2x_2+6x_3 \\ 2x_1+3x_2+8x_3 \\ -x_1+x_2+x_3 \\ 3x_1+x_2+5x_3 \end{pmatrix}$$

als Linksmultiplikation mit einer Matrix und finde je eine Basis ihres Kerns und ihres Bildes.

14. Gegeben seien Elemente $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in K$. Welchen Rang kann die $n \times m$ Matrix $A := (a_i b_j)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$ haben?

15. Bestimme den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$, beziehungsweise über $\mathbb{F}_2$.

16. Gegeben seien die beiden geordneten Basen $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_4)$ und $\mathcal{B}' := (w_1, \ldots, w_4)$ von $\mathbb{Q}^4$ mit

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_4 := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechne die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}$.

17. Gegeben sei eine reelle $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ mit

   (i) $|a_{ii}| \geqslant 1$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$, und

   (ii) $|a_{ij}| < \dfrac{1}{n-1}$ für alle $i \neq j$.

   Zeige, dass A invertierbar ist.

18. Berechne eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung $\mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$, die durch Linksmultiplikation mit der folgenden Matrix definiert ist:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

19. Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : V \to W$. Zeige, dass f injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv ist genau dann, wenn die duale lineare Abbildung $f^\vee : W^\vee \to V^\vee$ surjektiv bzw. injektiv bzw. bijektiv ist.

20. Berechne die Determinante und, wenn möglich, die Inverse folgender Matrizen über $\mathbb{Q}$:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 := \begin{pmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 5 & 5 & 15 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_6 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -12 \end{pmatrix}$$

21. Berechne

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, 2^{a(\sigma)},$$

wobei $a(\sigma)$ die Anzahl der Fixpunkte von σ bezeichnet:

$$a(\sigma) = \#\big\{k \in \{1, \ldots, n\} \;\big|\; \sigma(k) = k\big\}.$$

(*Hinweis:* Die Summe ist die Determinante einer gewissen $n \times n$-Matrix.)

22. Zeige: Für jede $m \times n$ Matrix A und für jede $n \times m$ Matrix B gilt:

$$\det(I_m + A \cdot B) \;=\; \det(I_n + B \cdot A).$$

(*Hinweis:* Zerlege die $(m+n) \times (m+n)$-Blockmatrix $M := \begin{pmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{pmatrix}$ als Produkt $M = M_1 \cdot M_2$ von Blockdreiecksmatrizen M_1, M_2 auf zwei verschiedene Arten und berechne die Determinante.)

23. Sei K ein Körper, welcher ein Element $a \in K$ mit $a^3 = 1$ und $a \neq 1$, enthält. Zeige, dass die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

ähnlich sind.

24. Entscheide, welche der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ ähnlich sind:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A_5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_7 := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_8 := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

25. Sei A eine quadratische Matrix. Zeige, dass A und A^T dieselben Eigenwerte mit denselben arithmetischen und geometrischen Vielfachheiten besitzen.

26. Seien Folgen $(a_i)_{i\geqslant 0}, (b_i)_{i\geqslant 0}, (c_i)_{i\geqslant 0}$ in $\mathbb{Q}$ definiert durch die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} a_{i+1} &:= a_i - 3b_i + 3c_i, \\ b_{i+1} &:= -2a_i + 2c_i, \\ c_{i+1} &:= a_i - b_i + 3c_i \end{aligned}$$

für alle $i \geqslant 0$, und die Anfangsbedingungen

$$a_0 := 1, \quad b_0 := 2 \quad \text{und} \quad c_0 := 1\,.$$

Bestimme explizite Lösungsformeln für a_i, b_i, c_i.

*27. Ein *stochastischer Vektor* ist ein Spaltenvektor mit Einträgen in $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$ und Summe aller Einträge 1. Eine *stochastische* oder *Markov-Matrix* ist eine quadratische Matrix, deren Spalten stochastische Vektoren sind. Sei A eine stochastische $n \times n$-Matrix mit $n > 0$. Zeige:

(a) Für jeden stochastischen Vektor v ist auch Av ein stochastischer Vektor.

(b) Jeder komplexe Eigenwert λ von A hat Absolutbetrag $|\lambda| \leqslant 1$.

(c) Die Zahl 1 ist ein Eigenwert von A.

Seien nun alle Einträge von A positiv. Zeige:

(d) Der Eigenwert 1 hat geometrische Multiplizität 1.

(e) Der Eigenwert 1 hat arithmetische Multiplizität 1.

(f) Alle komplexen Eigenwerte $\lambda \neq 1$ haben Absolutbetrag $|\lambda| < 1$.

(g) Es existiert genau ein stochastischer Vektor v_1 mit $Av_1 = v_1$.

(h) Für jeden stochastischen Vektor v gilt $A^m v \to v_1$ für $m \to \infty$.

(*Hinweis:* Für (e) und (h) nehme vorläufig an, dass A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist. Beweise den allgemeinen Fall, nachdem die Jordan-Normalform behandelt wurde.)

*28. Gegeben sei ein diskretes dynamisches System mit n Zuständen, bei dem in jedem Zeitschritt der Zustand j mit der Wahrscheinlichkeit a_{ij} in den Zustand i übergeht, und die Übergänge zu verschiedenen Zeiten alle voneinander unabhängig sind. Dann ist $A = (a_{ij})_{i,j}$ eine Markovmatrix, das heisst, eine quadratische Matrix mit reellen Koeffizenten $\geqslant 0$ und jeder Spaltensumme gleich 1. Zur Zeit 0 habe der Zustand i die Wahrscheilnichkeit v_i. Mit dem Spaltenvektor $v := (v_i)$ sind dann die Wahrscheinlichkeiten der Zustände zur Zeit m die Einträge des Vektors $A^m v$. Gefragt ist, wie sich das System für $m \to \infty$ entwickelt.

Im Jahr 2014 waren an der ETH Zürich 18178, an der Universität Zürich 25715 und an der EPFL Lausanne 9666 Studenten eingeschrieben. Wir nehmen hypothetisch das folgende an: Während jedes Jahres wechseln 1/8 der ETH Studenten zur UZH und 1/8 zur EPFL. Von der UZH wechseln jedes Jahr 1/3 der Studenten zur ETH und 1/3 zur EPFL. Von der EPFL wechseln jedes Jahr 1/4 der Studenten zur ETH und 1/8 zur UZH. Alle übrigen Studenten bleiben an ihrer Heimatuniversität. Wir nehmen weiter an, dass die Gesamtanzahl Studierender gleichbleibt und die Studentenschaft sich in gleichem Masse erneuert (gleiche Anzahl Aus- und Eintritte).

(a) Bestimme die Markov-Übergangsmatrix zu diesem System.

(b) Bestimme die Studentenanteile und die Zahl der Studenten der drei Universitäten im Jahr 2114.

(c) Schätze die Anteile nach Ablauf des Jahrs 3014 möglichst genau, wenn die Anteile im Jahr 2014 unbekannt sind.

*29. (a) Beweise das Bruhat-Lemma: Für je zwei Fahnen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ eines endlichdimensionalen Vektorraums V existiert eine Basis von V, so dass jeder Teilraum in $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ von einer Teilmenge der Basis erzeugt wird.

(b) Folgere daraus die Bruhat-Zerlegung: Jede invertierbare quadratische Matrix A lässt sich schreiben als $A = BWB'$ mit oberen Dreiecksmatrizen B und B' sowie einer Permutationsmatrix W.