## 3.2 Matrizen

Seien $m, n, \ell$ natürliche Zahlen.

**Definition:** Eine *Matrix mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten*, oder kurz eine *$m \times n$-Matrix*, *über $K$* ist ein Ausdruck $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ mit Koeffizienten $a_{ij} \in K$, ausführlich geschrieben als rechteckiges Schema

Zeile

Spalten

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}$$

Der erste Index $i$ in $(\dots)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ bezeichnet stets die Zeile, der zweite $j$ die Spalte.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

**Definition:** Eine $m \times m$-Matrix heisst *quadratisch.* Eine $m \times 1$-Matrix heisst ein *Spaltenvektor*, eine $1 \times n$-Matrix ein *Zeilenvektor.*

$(a_1, \dots, a_n)$

**Beispiel:** Die *Nullmatrix* $O := O_{m,n} := (0)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ mit allen Einträgen gleich 0.

**Beispiel:** Die (quadratische) *Einheitsmatrix* $I := I_m := (\delta_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$ mit der *Kronecker-Deltafunktion*

$$\boxed{\delta_{ij} \ := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

das heisst, mit allen Diagonaleinträgen gleich 1 und allen übrigen Einträgen gleich 0.

**Definition:** Das *Produkt* einer $m \times n$-Matrix $\boxed{A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}}$ mit einem Element $\lambda \in K$ ist die $m \times n$-Matrix

$$\lambda \cdot A \ := \ A \cdot \lambda \ := \boxed{(\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}.}$$

$a_{ij}$

**Definition:** Die *Summe* zweier $m \times n$-Matrizen $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ und $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ ist die $m \times n$-Matrix

$$\boxed{A + B \ := \ (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}.}$$

Wie immer bei Addition kürzen wir ab $-B := (-1) \cdot B$ und $A - B := A + (-1) \cdot B$.

**Definition:** Das *Produkt* einer $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ mit einer $n \times \ell$-Matrix $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant \ell}}$ ist die $m \times \ell$-Matrix

$$\boxed{A \cdot B \ := \ \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\Big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant k \leqslant \ell}}.}$$

$$i \to \begin{pmatrix} & & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & b_{1k} & \vdots \\ \vdots & b_{2k} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{nk} & \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \uparrow \\ k \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} k \\ \downarrow \end{array} \\ i \to \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \boxed{a_{i1}b_{1k} + \dots + a_{in}b_{nk}} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array}$$

## 3.3 Grundeigenschaften

**Proposition:** Für alle Matrizen $A$, $B$, $C$ über $K$ und alle $\lambda$, $\mu \in K$ gilt, sofern die Matrizen die für die jeweilige Formel richtige Grösse besitzen:

$$\begin{aligned}
A + (B + C) &= (A + B) + C && \text{(Assoziativität der Addition)}\\
A + B &= B + A && \text{(Kommutativität der Addition)}\\
O_{m,n} + A &= A && \text{(Neutrales Element der Addition)}\\
A + (-1) \cdot A &= O_{m,n} && \text{(Inverses Element der Addition)}\\[1ex]
\lambda \cdot (A + B) &= \lambda \cdot A + \lambda \cdot B && \text{(Linksdistributivität der skalaren Multiplikation)}\\
(\lambda + \mu) \cdot A &= \lambda \cdot A + \mu \cdot A && \text{(Rechtsdistributivität der skalaren Multiplikation)}\\
\lambda \cdot (\mu \cdot A) &= (\lambda \cdot \mu) \cdot A && \text{(Assoziativität der skalaren Multiplikation)}\\
1 \cdot A &= A && \text{(Einselement und skalare Multiplikation)}\\
0 \cdot A &= O_{m,n} && \text{(Nullelement und skalare Multiplikation)}\\[1ex]
A \cdot (B \cdot C) &= (A \cdot B) \cdot C && \text{(Assoziativität der Multiplikation)}\\
A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C && \text{(Linksdistributivität der Multiplikation)}\\
(A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C && \text{(Rechtsdistributivität der Multiplikation)}\\
I_m \cdot A &= A && \text{(Linksneutrales Element der Multiplikation)}\\
A \cdot I_n &= A && \text{(Rechtsneutrales Element der Multiplikation)}\\[1ex]
\lambda \cdot (A \cdot B) &= (\lambda \cdot A) \cdot B && \text{(Assoziativität für gemischte Multiplikation)}\\
\lambda \cdot (A \cdot B) &= A \cdot (\lambda \cdot B) && \text{(Assoziativität für gemischte Multiplikation)}
\end{aligned}$$

<u>Beh.</u>: $A(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$

<u>Bew.</u>: $A = (a_{ij})_{i,j}$ ; $B = (b_{jk})_{j,k}$ ; $C = (c_{kl})_{k,l}$

$$\Rightarrow A\cdot(B\cdot C) = (a_{ij})_{i,j} \cdot \left(\sum_k b_{jk}\cdot c_{kl}\right)_{j,l}$$

$$= \left(\sum_j a_{ij}\left(\sum_k b_{jk} c_{kl}\right)\right)_{i,l}$$

$$= \left(\sum_k \left(\sum_j a_{ij} b_{jk}\right) c_{kl}\right)_{i,l}$$

$$= \left(\sum_j a_{ij} b_{jk}\right)_{i,k} \cdot (c_{kl})_{k,l}$$

$$= (A\cdot B)\cdot C$$

<u>qed</u>.

Beh.: $I_m \cdot A = A$ $\qquad A = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$

Bew.: $I_m \cdot A = (\delta_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..m}} \cdot (a_{jk})_{\substack{j=1..m \\ k=1..n}}$

$$= \left( \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \underbrace{\delta_{ij}}\, a_{jk}} \right)_{\substack{i=1..m \\ k=1..n}} = (a_{ik})_{\substack{i=1..m \\ k=1..n}} = A.$$

qed.