

Also ist  $u' \oplus u = V$ , Also ist  $u' \oplus u = V$ . ged.

**Beispiel:** Für  $m \leq n$  betrachte die Injektion  $i: K^m \hookrightarrow K^n, x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$  sowie die dazu komplementäre Injektion  $j: K^{n-m} \hookrightarrow K^n, y \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ . Dann induziert  $j$  einen Isomorphismus  $K^{n-m} \xrightarrow{\sim} K^n / i(K^m)$ .

$$K^m \xrightarrow{i} K^n, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K^{n-m} \xrightarrow{j} K^n, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-m} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-m} \end{pmatrix}$$

$$K^m \xrightarrow{\sim} \text{Bild}(i) \leftarrow \text{Komplemente.}$$

$$K^n \xrightarrow{\sim} \text{Bild}(j) \checkmark$$

$$\Rightarrow K^{n-m} \xrightarrow{\sim} \text{Bild}(j) \xrightarrow{\sim} K^n / \text{Bild}(i)$$

**Proposition:** Sei  $B$  eine Basis von  $V$ , so dass  $B \cap U$  eine Basis von  $U$  ist. Dann ist  $\{v + U \mid v \in B \setminus U\}$  eine Basis von  $V/U$ . Insbesondere gilt

$$\pi(B \setminus U)$$

$$\dim_K(V) = \dim_K(U) + \dim_K(V/U).$$

Beweis:  $U' := \langle B \setminus U \rangle$ .

$$\dim(V) = \dim U + \dim U' = \dim U + \dim(V/U)$$

$$V = \langle B \rangle = \langle B \cap U \rangle \oplus \langle B \setminus U \rangle = U \oplus U'$$

$$\left. \begin{array}{l} U' \xrightarrow{\sim} V/U. \\ B \setminus U \xrightarrow{\pi} \pi(B \setminus U) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi(B \setminus U) \text{ ist Basis von } V/U.$$

ged.

**Variante:** Sei  $B = (b_1, \dots, b_n)$  eine geordnete Basis von  $V$ , deren Anfangssegment  $B' := (b_1, \dots, b_m)$  eine geordnete Basis von  $U$  ist. Dann ist  $B'' := (b_{m+1} + U, \dots, b_n + U)$  eine geordnete Basis von  $V/U$ .

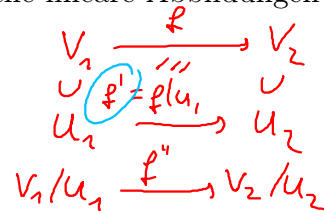
**Proposition:** Für jedes  $i = 1, 2$  sei  $V_i$  ein  $K$ -Vektorraum mit geordneter Basis  $B_i$ , sei  $U_i \subset V_i$  der von einem Anfangssegment  $B'_i$  von  $B_i$  erzeugte Unterraum, und sei  $B''_i$  die wie oben induzierte geordnete Basis von  $V_i/U_i$ . Jede lineare Abbildung  $f: V_1 \rightarrow V_2$  mit  $f(U_1) \subset U_2$  induziert natürliche lineare Abbildungen

$$f': U_1 \rightarrow U_2, u \mapsto f(u),$$

$$f'': V_1/U_1 \rightarrow V_2/U_2, v + U_1 \mapsto f(v) + U_2,$$

und die Darstellungsmatrix von  $f$  hat die Blockdreiecksgestalt

$$B_2[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} B'_2[f']_{B'_1} & * \\ 0 & B''_2[f'']_{B''_1} \end{pmatrix}.$$



**Beispiel:** Von der Raumzeit der Newtonschen Mechanik aus gesehen ist die Zeit auf natürliche Weise ein Faktorraum und kein Unterraum.

$$\text{Raumzeit} = \mathbb{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{Raum} \\ \leftarrow \text{Zeit} \end{array} \right\}$$

$$F: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} \text{invertierbar} & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ t + t_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^4, t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\pi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto t$$

$$\text{Kern}(\pi) = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$$

$$F \downarrow \begin{array}{c} \text{///} \\ \mathbb{R}^k \xrightarrow{\pi} \mathbb{R} \end{array} \downarrow + t_0$$

$$\frac{a}{b} = c \iff a = b \cdot c$$