Also ist $U' + U = V$, Also ist $U' \oplus U = V$. qed.

Beispiel: Für $m \leqslant n$ betrachte die Injektion $i\colon K^m \hookrightarrow K^n$, $x \mapsto \binom{x}{0}$ sowie die dazu komplementäre Injektion $j\colon K^{n-m} \hookrightarrow K^n$, $y \mapsto \binom{0}{y}$. Dann induziert j einen Isomorphismus $K^{n-m} \xrightarrow{\sim} K^n / i(K^m)$.

$K^m \overset{i}{\hookrightarrow} K^n$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$K^{n-m} \overset{j}{\hookrightarrow} K^n$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-m} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-m} \end{pmatrix}$

$K^m \xrightarrow{\sim} \text{Bild}(i) \leftarrow$ Komplemente.
$K^n \xrightarrow{\sim} \text{Bild}(j)$

$\Rightarrow \quad K^{n-m} \xrightarrow{\sim} \text{Bild}(j) \xrightarrow{\sim} K^n / \text{Bild}(i)$

Proposition: Sei B eine Basis von V, so dass $B \cap U$ eine Basis von U ist. Dann ist $\{v + U \mid v \in B \setminus U\}$ eine Basis von V/U. Insbesondere gilt

$\pi(B \setminus U)$

$$\dim_K(V) \;=\; \dim_K(U) + \dim_K(V/U).$$

Beweis: $U' := \langle B \setminus U \rangle$.

$V = \langle B \rangle = \langle B \cap U \rangle \oplus \langle B \setminus U \rangle = U \oplus U'$

$U' \xrightarrow{\sim} V/U$.
$B \setminus U \qquad \pi(B \setminus U)$
$\Rightarrow$ $\pi(B \setminus U)$ ist Basis von V/U.

$\dim(V) = \dim U + \dim U' = \dim U + \dim(V/U)$

qed.

Variante: Sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine geordnete Basis von V, deren Anfangssegment $B' := (b_1, \ldots, b_m)$ eine geordnete Basis von U ist. Dann ist $B'' := (b_{m+1} + U, \ldots, b_n + U)$ eine geordnete Basis von V/U.

Proposition: Für jedes $i = 1, 2$ sei V_i ein K-Vektorraum mit geordneter Basis B_i, sei $U_i \subset V_i$ der von einem Anfangssegment B_i' von B_i erzeugte Unterraum, und sei B_i'' die wie oben induzierte geordnete Basis von V_i/U_i. Jede lineare Abbildung $f\colon V_1 \to V_2$ mit $f(U_1) \subset U_2$ induziert natürliche lineare Abbildungen

$$f'\colon U_1 \to U_2,\ u \mapsto f(u),$$

$$f''\colon V_1/U_1 \to V_2/U_2,\ v + U_1 \mapsto f(v) + U_2,$$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] & V_2 \\ U_1 \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "f' = f|U_1"] & U_2 \arrow[u, phantom, "\cup"] \\ V_1/U_1 \arrow[r, "f''"] & V_2/U_2 \end{tikzcd}$$

und die Darstellungsmatrix von f hat die Blockdreiecksgestalt

$$\boxed{{}_{B_2}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} {}_{B_2'}[f']_{B_1'} & * \\ 0 & {}_{B_2''}[f'']_{B_1''} \end{pmatrix}}.$$

Beispiel: Von der Raumzeit der Newtonschen Mechanik aus gesehen ist die Zeit auf natürliche Weise ein Faktorraum und kein Unterraum.

$$\text{Raumzeit} = \mathbb{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{Raum} \\ \leftarrow \text{Zeit} \end{array}$$

$$F: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} & \text{invertierbar} & & * \\ & & & * \\ & & & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ t + t_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^4, \; t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\pi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto t$$

$$\operatorname{Ker}(\pi) = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^4 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "F"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\cdot + t_0"] \\ \mathbb{R}^4 \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\frac{a}{b} = c \iff a = b \cdot c.$$