

Erinnerung:

Definition: Eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$, zu welcher eine lineare Abbildung $g: W \rightarrow V$ existiert mit $g \circ f = \text{id}_V$ und $f \circ g = \text{id}_W$, heisst ein Isomorphismus.

Satz: Eine lineare Abbildung f ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sie bijektiv ist.

Definition: Zwei Vektorräume V und W über einem Körper K heissen isomorph, in Symbolen $V \cong W$, wenn ein Isomorphismus zwischen ihnen existiert.

Vorsicht: Gibt es einen Isomorphismus, so gibt es im allgemeinen viele, und möglicherweise keinen besonders ausgezeichneten. Isomorphe Vektorräume darf man also nicht ohne weiteres miteinander identifizieren.

Satz: Die Relation \cong ist eine Äquivalenzrelation. Genauer ist jede Komposition zweier Isomorphismen ein Isomorphismus, die identische Abbildung auf jedem Vektorraum ein Isomorphismus, und die Inverse jedes Isomorphismus ein Isomorphismus.

Bew.:

\downarrow
symmetrisch.

\downarrow
reflexiv.

\uparrow
transitiv.
 $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$

$$\begin{aligned} \underline{(h \circ f) \circ (f^{-1} \circ h^{-1})} &= h \circ (f \circ f^{-1}) \circ h^{-1} = h \circ \text{id}_V \circ h^{-1} = h \circ h^{-1} = \text{id}_W \\ \underline{(f^{-1} \circ h^{-1}) \circ (h \circ f)} &= \dots \dots \dots = \text{id}_V \end{aligned}$$

qed.

$f:$
Satz: (a) Jeder Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} W$ bildet jede Basis B von V bijektiv auf eine Basis von W ab.
 (b) Es gilt $V \cong W$ genau dann, wenn $\dim(V) = \dim(W)$ ist.

Beweis f bijektiv $\Rightarrow f$ induziert Bijektiv $B \rightarrow f(B)$

$$\text{Für jedes } w \in W \text{ gilt } w = \sum_{b \in B} x_b \cdot f(b) \iff w = f\left(\sum_b x_b b\right)$$

$$\iff f^{-1}(w) = \sum_b x_b b.$$

(a) \Leftarrow ebenso \Leftarrow gilt hingegen eine Wahl der x_b .

(b) Ist $f: V \xrightarrow{\sim} W$, so ist $\dim(V) = |B| = |f(B)| = \dim(W)$

Sei umgekehrt $\dim(V) = \dim(W)$.

Wähle Basen $\left\{ \begin{array}{l} B \text{ von } V \\ B' \text{ von } W \end{array} \right\}$, Dann ist $|B| = \dim(V) = \dim(W) = |B'|$.

Wähle Bijektiv $f_0: B \rightarrow B'$. Setze f_0 fort zu einer lin. Abs.

$$f: V \rightarrow W \text{ durch } f\left(\sum_{b \in B} x_b b\right) := \sum_{b \in B} x_b f_0(b).$$

Dies ist bijektiv, also ein Isomorphismus.

qed.

Definition:

- (a) Ein *Homomorphismus* ist eine lineare Abbildung, geschrieben $V \rightarrow W$.
- (b) Ein *Monomorphismus* ist eine injektive lineare Abbildung, geschrieben $V \hookrightarrow W$.
- (c) Ein *Epimorphismus* ist eine surjektive lineare Abbildung, geschrieben $V \twoheadrightarrow W$.
- (d) Ein *Isomorphismus* ist ... (siehe oben) ... , geschrieben $V \xrightarrow{\sim} W$.
- (e) Ein *Endomorphismus* von V ist eine lineare Abbildung $V \rightarrow V$.
- (f) Ein *Automorphismus* von V ist ein Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} V$.

Proposition: Die Menge $\text{Aut}(V)$ aller Automorphismen von V zusammen mit der Komposition \circ und dem neutralen Element id_V ist eine Gruppe, genannt die *Automorphismengruppe von V* .

Beispiel: Die Abbildung $A \mapsto L_A$ induziert eine Bijektion $\text{GL}_n(K) \rightarrow \text{Aut}(K^n)$, welche mit der Gruppenoperation auf beiden Seiten verträglich ist, also einen *Gruppen-Isomorphismus*.

$\text{GL}_n = \underline{\text{General linear group}}$.

5.4 Direkte Produkte und Summen

Definition: Das kartesische Produkt von K -Vektorräumen

$$\prod_{i \in I} V_i := \{ (v_i)_{i \in I} \mid \forall i: v_i \in V_i \}$$

$$= \prod_{i \in I} V_i$$

versehen mit den Operationen

$$(v_i)_i + (v'_i)_i := (v_i + v'_i)_i$$

$$\lambda \cdot (v_i)_i := (\lambda v_i)_i$$

und dem Nullelement $(0_{V_i})_i$ heisst das *(direkte) Produkt von $(V_i)_{i \in I}$* . Ihre Teilmenge

$$\bigoplus_{i \in I} V_i := \{ (v_i)_{i \in I} \mid \forall i: v_i \in V_i, \text{ fast alle } v_i = 0_{V_i} \}$$

$$\left(= \bigoplus_{i \in I} V_i \right)$$

heisst die *äussere direkte Summe von $(V_i)_{i \in I}$* .

Konvention: Sind alle Faktoren gleich, so schreibt man oft $V^I := \prod_{i \in I} V$ und $V^{(I)} := \bigoplus_{i \in I} V$. Die Elemente von $\bigoplus_{i \in I} V_i$, insbesondere von $\bigoplus_{i \in I} K$, schreibt man oft als formale Linearkombinationen $(v_i)_i = \sum_{i \in I} v_i \cdot X_i$ mit neugewählten Symbolen X_i .

Proposition: Das Produkt $\prod_{i \in I} V_i$ ist ein K -Vektorraum und $\bigoplus_{i \in I} V_i$ ist ein Unterraum, und für jedes $j \in I$ sind die folgenden Abbildungen linear:

$$\text{proj}_j: \prod_{i \in I} V_i \rightarrow V_j, \quad (v_i)_i \mapsto v_j$$

$$\text{incl}_j: V_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i, \quad v_j \mapsto \left(\begin{cases} v_j & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \right)_i$$

Proposition: Für beliebige Unterräume V_i eines Vektorraums V ist die folgende Abbildung linear:

$$\bigoplus_{i \in I} V_i \longrightarrow V, \quad (v_i)_{i \in I} \mapsto \sum'_{i \in I} v_i.$$

Definition: Der Vektorraum V heisst die *innere direkte Summe von V_i für $i \in I$* , wenn die obige Abbildung ein Isomorphismus ist, und dann schreiben wir

$$\bigoplus_{i \in I} V_i = V.$$

$$\bigoplus_{i \in I} V_i \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} V_i$$

Konvention: Im Fall $I = \{1, \dots, r\}$ schreiben wir auch

$$\begin{aligned} V_1 \times \dots \times V_r &= \prod_{i=1}^r V_i, \\ V_1 \boxplus \dots \boxplus V_r &= \boxplus_{i=1}^r V_i, \\ V_1 \oplus \dots \oplus V_r &= \bigoplus_{i=1}^r V_i. \end{aligned}$$

Für $r = 2$ stimmt diese Definition von $V_1 \oplus V_2$ mit derjenigen in §4.9 überein.

Konvention: Oft werden innere und äussere direkte Summe mit demselben Symbol \bigoplus bezeichnet. Welche dann jeweils gemeint ist, muss man aus dem Zusammenhang erschliessen.

5.5 Geordnete Basen

Definition: Ein Tupel (v_1, \dots, v_n) von Vektoren in V heißt

- (a) linear unabhängig, wenn $\forall x_1, \dots, x_n \in K: (\sum_{i=1}^n x_i v_i = 0) \rightarrow (x_1 = \dots = x_n = 0)$.
- (b) Erzeugendensystem von V , wenn $\forall v \in V \exists x_1, \dots, x_n \in K: v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$.
- (c) geordnete Basis von V , wenn $\forall v \in V \exists! x_1, \dots, x_n \in K: v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$.

Der Begriff „geordnete Basis“ setzt also voraus, dass der Vektorraum endlich-dimensional ist.

Proposition: Ein Tupel (v_1, \dots, v_n) von Vektoren in V ist

- (a) linear unabhängig genau dann, wenn v_1, \dots, v_n paarweise verschieden sind und die Menge $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig ist.
- (b) ein Erzeugendensystem von V genau dann, wenn die Menge $\{v_1, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V ist.
- (c) eine geordnete Basis von V genau dann, wenn v_1, \dots, v_n paarweise verschieden sind und die Menge $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V ist.

Bew.: (a) Wäre $v_j = v_k$ für $j \neq k$, setze $x_i := \begin{cases} 1 & i=j \\ -1 & i=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow \sum x_i v_i = 0$.

$\Rightarrow (v_1, \dots, v_n)$ lin. abhängig.

Nur

qed

Proposition: Für jedes Tupel $T := (v_1, \dots, v_n)$ von Vektoren in V ist die Abbildung

$$\varphi_T: K^n \rightarrow V, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n x_i v_i$$

linear. Sie ist

- (a) injektiv genau dann, wenn T linear unabhängig ist.
- (b) surjektiv genau dann, wenn T ein Erzeugendensystem von V ist.
- (c) ein Isomorphismus genau dann, wenn T eine geordnete Basis von V ist.

Bew.

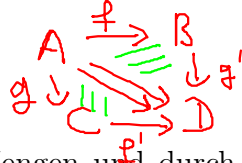
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_T(x+y) = \varphi_T\left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}\right) = \sum_i (x_i+y_i)v_i \\ = \sum_i x_i v_i + \sum_i y_i v_i = \varphi_T(x) + \varphi_T(y).$$

$$\text{Analog } \varphi_T(\lambda x) = \dots = \lambda \cdot \varphi_T(x).$$

φ_T injektiv $\Leftrightarrow \text{Kern}(\varphi_T) = \{0\} \Leftrightarrow (v_1, \dots, v_n)$ lin. unabh.

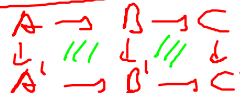
qed

5.6 Darstellungsmatrix



kommutativ $\Leftrightarrow g' \circ f = f' \circ g$

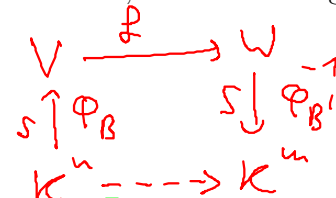
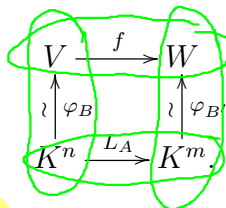
Definition: Ein Diagramm aus Mengen und durch Pfeile dargestellte Abbildungen heisst kommutativ, wenn für je zwei Wege in Pfeilrichtung mit demselben Startpunkt und demselben Endpunkt die zusammengesetzten Abbildungen übereinstimmen.



Bemerkung: Ein zusammengesetztes Diagramm ist oft genau dann kommutativ, wenn seine Teile kommutativ sind.

Prisp-

Definition: Seien $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V und $B' = (w_1, \dots, w_m)$ eine geordnete Basis von W . Die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $f: V \rightarrow W$ bezüglich der Basen B und B' ist die eindeutig bestimmte $m \times n$ -Matrix A , für die $f \circ \varphi_B = \varphi_{B'} \circ L_A$ gilt, das heisst, für die das folgende Diagramm kommutiert:



Wir bezeichnen diese Matrix A mit ${}_{B'}[f]_B$.

Eine explizite Rechnung mit dem Ansatz $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ liefert für alle $1 \leq j \leq n$:

$$f(v_j) = f(\varphi_B(e_j)) = \varphi_{B'}(L_A(e_j)) = \varphi_{B'}(Ae_j) = \varphi_{B'}\left(\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i.$$