8.4 Trigonalisierbarkeit

Sei weiterhin f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V.

Definition: Bsp.: $\{0, V\}$, $\emptyset$

(a) Eine Menge $\mathcal{F}$ von Teilräumen von V, die durch Inklusion total geordnet ist, heisst eine *Fahne* oder *Flagge.*

(b) Eine Fahne, die für jedes $0 \leqslant m \leqslant \dim_K(V)$ einen Unterraum der Dimension m enthält, heisst *vollständig* oder *maximal.*

Bsp.: 0, V

Definition: (a) Ein Unterraum U mit $f(U) \subset U$ heisst *f-invariant.*

(b) Eine Fahne, die aus f-invarianten Unterräumen besteht, heisst *f-invariant.*

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) Der Endomorphismus f ist *trigonalisierbar*, das heisst, es existiert eine geordnete Basis B von V, so dass die Darstellungsmatrix ${}_B[f]_B$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

(b) Es existiert eine f-invariante vollständige Fahne von V.

(c) Das charakteristische Polynom $\mathrm{char}_f(X)$ zerfällt in Linearfaktoren in $K[X]$.

Folge: Ist K algebraisch abgeschlossen, so ist jeder Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums trigonalisierbar.

Beweis des Satzes: (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ mit ${}_B[f]_B = (a_{ij})_{i,j}$ und $\forall i > j: a_{ij} = 0$

Für jedes $0 \le m \le n$ sei $V_m := \langle b_1, \dots, b_m \rangle$.

$\Rightarrow \forall b_j \in V_m: j \le m \Rightarrow f(b_j) \in \langle b_1, \dots, b_j \rangle \subset V_m$

$\Rightarrow \forall j: f(b_j) = \sum_{i=1}^{j} a_{ij} b_i$

$\Rightarrow f(V_m) \subset V_m$; $\dim(V_m) = m$; $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$. $\Rightarrow$ f-invariante vollständige Fahne.

(b) $\Rightarrow$ (a): Sei $\mathcal{F} = \{V_0, V_1, \dots, V_n\}$ mit $\dim(V_m) = m$ für alle m.

Für jedes $1 \le m \le n$ wähle $b_m \in V_m \setminus V_{m-1}$ $\Rightarrow$ b_m ist lin. unabh. von $b_1, \dots, b_{m-1}$.

Bh.: $\forall m$: $b_1, \dots, b_m$ Basis von V_m.

$\Rightarrow B := (b_1, \dots, b_n)$ Basis von V,

$f(b_m) \in f(V_m) \subset V_m \Rightarrow f(b_m) = \sum_{i=1}^{m} a_{im} b_i = \sum_{i=1}^{n} a_{im} b_i$ mit $a_{ij} = 0$ wenn $i > j$.

$\Rightarrow {}_B[f]_B = (a_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} & \\ 0 & \end{pmatrix}$

(a) $\Rightarrow$ (c): ${}_B[f]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow X \cdot I_n - {}_B[f]_B = \begin{pmatrix} X - a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & X - a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \det = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii})$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Induktion über $\dim(V)$.

$\dim(V) = 0$. ✓

$\dim(V) > 0$: Dann hat char_f eine Nullstelle λ. Sei v' ein EV zum EW λ.

d.h. $v' \neq 0$, $f(v') = \lambda v'$.

Sei $V' := \langle v' \rangle$. $\Rightarrow f(V') \subset V'$.

Setze $\bar V = V/V'$. Dann induziert f einen Endo $\bar f : \bar V \to \bar V$, $v + V' \mapsto f(v) + V'$.

$$\begin{tikzcd} V' \subset V \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, dotted] & V \arrow[d] \\ V/V' \arrow[r, dashed] & V/V' \end{tikzcd} \qquad \begin{matrix} v \\ \downarrow \\ \bar v \end{matrix}$$

Beh.: $\mathrm{char}_f(X) = (X-\lambda)\cdot \mathrm{char}_{\bar f}(X)$

Bew.: Sei $B' = (\underset{w_1}{\overset{\parallel}{v'}}, w_2, \ldots, w_n)$ eine Basis von V

$\Rightarrow \bar B' = (\bar w_2, \ldots, \bar w_n)$ ...... $\bar V$.

Schreibe ${}_{B'}[f]_{B'} = (b_{ij})_{i,j} \Rightarrow \underset{\lambda w_1}{\underset{\parallel}{f(w_1)}} = \sum_{i=1}^n b_{i1} w_i \Rightarrow b_{i1} = \begin{cases} \lambda & i = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow {}_{B'}[f]_{B'} = \boxed{\left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)}$

${}_{\bar B'}[\bar f]_{\bar B'}$

$\forall\, 2 \le j \le n$: $f(w_j) = \sum_{i=1}^n b_{ij} w_j \Rightarrow \bar f(\bar w_j) = \sum_{i=2}^n b_{ij} \cdot \bar w_j$

$\Rightarrow {}_{B'}[f]_{B'} = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & \cancel{*} \\ \hline 0 & {}_{\bar B'}[\bar f]_{\bar B'} \end{array}\right] \Rightarrow \mathrm{char}_f(X) = \det\left(\begin{array}{c|c} X-\lambda & \\ \hline & X\cdot I_{n-1} - {}_{\bar B'}[\bar f]_{\bar B'} \end{array}\right) = (X-\lambda)\cdot \mathrm{char}_{\bar f}(X)$

qed (Beh.)

Also zerfällt $\mathrm{char}_{\bar f}(X)$ in Linearfaktoren.

$\mathrm{IV} \Rightarrow$ Also existiert eine Basis $\bar b_2, \ldots, \bar b_n$ von $\bar V$ mit $\forall\, 2 \le j \le n$, $\bar f(\bar b_j) = \sum_{i=2}^{j} a_{ij} \bar b_i$.

Wähle $b_i \in V$ mit $b_i + V' = \bar b_i \Rightarrow v' =: b_1, b_2, \ldots, b_n$ Basis von V. $\Rightarrow f(b_1) = \lambda b_1$, $\forall j > 1$: $f(b_j) = \sum_{i=1}^{j} a_{ij} b_i$

für geeignete $a_{ij} \in k$.
$\Rightarrow {}_B[\ell]_B = (a_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} & \ast \\ 0 & \end{pmatrix}$ qed.

Beispiel: Für beliebige $a, b, c \in \mathbb{Q}$ mit $b \neq -c$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 0 & b \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 0 & b \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & * & * \\ 0 & -2 & * \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Berechne $\mathrm{char}_A(X) = (X+2)^3$.

Probiere $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Av_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2v_1 + \boxed{\ast} \Rightarrow \underbrace{Av_1 + 2v_1}_{(A-\lambda I)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =: v_2$

$Av_2 + 2v_2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle \Rightarrow \underbrace{(v_2, v_1, v_3)}_{U}$ Basis von $\mathbb{Q}^3$:

$Av_1 = -2v_1 + v_2$
$Av_2 = -2v_2$
$Av_3 = \ast$

$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \ast \\ 0 & -2 & \ast \\ 0 & 0 & \ast \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \ast \\ 0 & -2 & \ast \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Wenn w_3 lin. unabh. von w_1, w_2 ist, $V := (w_3, w_2, w_1)$
$\Rightarrow V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Aw_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+2I)w_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} =: w_2$; $(A+2I)w_2 =: w_3$

Beispiel: Über dem Körper $\mathbb{F}_2$ mit 2 Elementen gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \underset{A}{\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{(v_4,\, v_3,\, v_2,\, v_1)} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\mathrm{char}_A(X) = (X-1)^4$$

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+I)v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: v_2$$

$$(A+I)v_2 = \ldots = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: v_3$$

$$(A+I)v_3 = \ldots = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =: v_4$$

$$(A+I)v_4 = 0$$

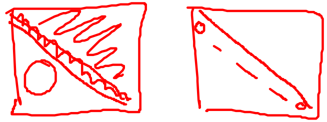
$$A v_4 = v_4$$

$$A v_3 = v_4 + v_3$$

$$A v_2 = v_3 + v_2$$

$$A v_1 = v_2 + v_1.$$

8.5 Nilpotente Endomorphismen I



Definition: Existiert ein $m \geqslant 1$ mit $f^m = 0$, so heisst f *nilpotent.*

Definition: Eine obere Dreiecksmatrix mit allen Diagonaleinträgen 0 heisst *strikte obere Dreiecksmatrix.*

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

$f(U_i) \subset U_i$

(a) Der Endomorphismus f ist nilpotent.

(b) Es existiert eine Fahne $\{U_0, U_1, \ldots, U_r\}$ von V mit $U_0 = 0$ und $U_r = V$ und $f(U_i) \subset U_{i-1}$ für alle $1 \leqslant i \leqslant r$.

$0 = U_0 \xleftarrow{f} U_1 \xleftarrow{f} U_2 \leftarrow \dots \xleftarrow{f} U_r = V$

(c) Es existiert eine geordnete Basis B von V, so dass die Darstellungsmatrix ${}_B[f]_B$ eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

(d) Es gilt $\mathrm{char}_f(X) = X^{\dim V}$.

Bew.: (b) $\Rightarrow$ (a): Dann gilt $f^r(V) = f^r(U_r) \subset U_0 = 0 \Rightarrow f^r = 0$.

(a) $\Rightarrow$ (b): Sei $f^m = 0$. Für $0 \le i \le m$ setze $U_i := f^i(V)$.

$\Rightarrow \forall\, 0 \le i < m$: $\underbrace{f^{i+1}(V)}_{= U_{i+1}} = f^i(f(V)) \subset \underbrace{f^i(V)}_{= U_i}$ da $f(V) \subset V$.

$U_{i+1} \subset U_i$

$\left.\begin{array}{l} f^m = 0 \Rightarrow U_m = 0. \\ f^0 = id \Rightarrow U_0 = V. \end{array}\right\} \Rightarrow U_m, U_{m-1}, \dots, U_0$ erfüllen (b).

(b) ⇒ (c) Wähle Basis $(b_1, \dots, b_n) = B$ von V, so dass jedes U_i von einem Anfangssegment von B erzeugt ist. $\Rightarrow \forall j$: sei $b_j \in U_i \setminus U_{i-1} \Rightarrow f(b_j) \in U_{i-1}$.

$$\Rightarrow f(b_j) = \sum_{k=1}^{j-1} a_{kj} b_k .$$

$$\Rightarrow {}_B[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

(c) ⇒ (b) Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ mit ${}_B[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$, setze $U_i := \langle b_1, \dots, b_i \rangle$

$\Rightarrow$ vollst. Fahne $U_0, \dots, U_n$, mit $f(U_i) \subset U_{i-1}$.

(c) ⇒ (d) $X \cdot I_n - {}_B[f]_B = \begin{pmatrix} X & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & X \end{pmatrix} \Rightarrow \det = X^n$.

(d) ⇒ (c): $\underline{\underline{\mathrm{char}_f(X) = X^n}} \underset{\text{(Satz)}}{\Rightarrow} \exists B : {}_B[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathrm{char}_f(X) = \prod_i (X - \lambda_i) \Rightarrow$ alle $\lambda_i = 0$,

$\Rightarrow$ strikte obere Dreiecksmatrix. qed