Erinnerung:

$f: V \to V$; $\dim V < \infty$.

Definition: Existiert ein $m \geqslant 1$ mit $f^m = 0$, so heisst f *nilpotent*.

Definition: Eine obere Dreiecksmatrix mit allen Diagonaleinträgen 0 heisst *strikte obere Dreiecksmatrix*.

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) Der Endomorphismus f ist nilpotent.

(b) Es existiert eine Fahne $\{U_0, U_1, \ldots, U_r\}$ von V mit $U_0 = 0$ und $U_r = V$ und $f(U_i) \subset U_{i-1}$ für alle $1 \leqslant i \leqslant r$.

(c) Es existiert eine geordnete Basis B von V, so dass die Darstellungsmatrix ${}_B[f]_B$ eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

(d) Es gilt $\mathrm{char}_f(X) = X^{\dim V}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Die Matrix

$$\boxed{B := \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}}$$

hat charakteristisches Polynom $\underline{X^3}$. Wir schauen uns ihre Wirkung auf irgendeinen Basisvektor an:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{B\cdot} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \xmapsto{B\cdot} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \xmapsto{B\cdot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus dieser Rechnung folgt schon

$$\boxed{U^{-1}BU} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}} \qquad \text{für} \qquad \boxed{U := \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.6 Nilpotente Endomorphismen II

Definition: Für jedes $j \geqslant 1$ heisst die folgende $j \times j$-Matrix ein *Jordanblock zum Eigenwert* 0:

$$\boxed{N_j := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}}$$

$\mathrm{Rang}\,(N_j) = j-1.$

Satz: *(Jordansche Normalform)* Ist f nilpotent, so existiert eine geordnete Basis B von V, so dass die Darstellungsmatrix eine Blockdiagonalmatrix der folgenden Form ist:

$$\boxed{{}_B[f]_B = \begin{pmatrix} N_{j_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_{j_r} \end{pmatrix}}$$

$\mathrm{Rang} = \sum_{i=1}^{r} (j_i - 1)$

Bew.: Induktion über $\dim(V)$. $V = 0$ ✓.

$V \neq 0$. Sei $\tilde{B} = (\tilde b_1, \dots, \tilde b_n)$ Basis so dass ${}_{\tilde B}[f]_{\tilde B} = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow V' := \langle \tilde b_1, \dots, \tilde b_{n-1} \rangle$ ist f-invariant. $f' := f|_{V'}$ nilpotenter Endo von V'.

$\overset{IV}{\Rightarrow} \exists$ Basis $(b_1, \dots, b_{n-1}) = B'$ von V' so dass ${}_{B'}[f']_{B'}$ die gewünschte Gestalt hat.

$$_{B'}[f']_{B'} = \begin{pmatrix} N_{j_1} & & \\ & \ddots & \\ & & N_{j_r} \end{pmatrix}$$

d.h. $\forall\, 1 \le i \le n-1: \; f(b_i) = b_{i-1}$ oder 0.

Seien $\{b_1, \dots, b_{n-1}\} = \left\{ b_{i,k} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \le i \le r \\ 1 \le k \le j_i \end{matrix} \right\}$

so dann $\boxed{f(b_{i,k}) = \begin{cases} b_{i,k-1} & k > 1 \\ 0 & k = 1 \end{cases}}$

Sei $\underset{\tilde{b}_n}{\underset{\shortparallel}{v}} \in V \setminus V'$ beliebig. $\Rightarrow f(v) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{j_i} x_{ik} \cdot b_{ik}$ mit $x_{ik} \in K$.

Setze $\tilde{v} := v - \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{j_i - 1} x_{ik} \cdot b_{i,k+1} \in V \setminus V'$

$$\Rightarrow f(\tilde{v}) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{j_i} x_{ik} b_{ik} - \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{j_i - 1} x_{ik} \underbrace{f(b_{i,k+1})}_{b_{i,k}} = \sum_{i=1}^{r} x_{i,j_i} \cdot b_{i,j_i}.$$

$$\begin{pmatrix} N_{j_1} & 0 & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & N_{j_r} & * \\ 0 & \cdots\; 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sind alle $x_{i,j_i} = 0$, sind wir fertig: $B := (b_1, \dots, b_n, \tilde{v}) \Rightarrow {}_B[f]_B = \begin{pmatrix} N_{j_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & N_{j_r} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ $\leftarrow N_1$

Sonst: Wähle i mit $x_{i,j_i} \neq 0$ und j_i maximal.

OBdA $x_{r,j_r} \neq 0$ und $\forall i: x_{i,j_i} \neq 0: \; j_i \le j_r$.

Setze $\left.\begin{aligned} \tilde{b}_{r,j_r+1} &:= \tilde{v}, \\ \tilde{b}_{r,k} &:= f^{j_r+1-k}(\tilde{v}) \text{ für jedes } 1 \le k \le j_r + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tilde{b}_{r,j_r+1} \overset{f}{\longmapsto} \tilde{b}_{r,j_r} \overset{f}{\longmapsto} \tilde{b}_{r,j_r-1} \mapsto \cdots \mapsto \tilde{b}_{r,1}$

Dann ist $\quad f(\tilde b_{r,1}) = f^{j_r+1}(\tilde v) = f^{j_r}(f(\tilde v)) = \sum_{i=1}^{r} x_{i,j_i} \cdot \underbrace{f^{j_r}(b_{i,j_i})}_{=0}$ da $j_r \geq j_i$.

$$B := (b_{11}, \dots, b_{1j_1}, b_{21}, \dots, b_{r-1,j_{r-1}}, \tilde b_{r,1}, \dots, \tilde b_{r,j_r+1})$$

$\tilde v = \tilde b_{r,j_r+1} \in V \setminus V'$.

$$\forall\, 1 \leq k \leq j_r: \quad \tilde b_{r,k} = f^{j_r-k}(f(\tilde v)) = \sum_{i=1}^{r} x_{i,j_i} \cdot \underbrace{f^{j_r-k}(b_{i,j_i})}_{} = \begin{cases} b_{i,j_i-j_r+k} & \text{falls } j_i-j_r+k>0 \\ 0 & \end{cases}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{r-1} x_{i,j_i} \cdot \begin{cases} b_{i,*} & \text{oder} \\ 0 & \end{cases}}_{} + \underbrace{x_{r,j_r}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{b_{r,k}}_{}$$

$\Rightarrow$ B ist Basis von V,

und $\quad {}_B[f]_B = \left(\begin{array}{ccc|c} N_{j_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & N_{j_{r-1}} & \\ \hline & & & N_{j_r+1} \end{array}\right)$

qed.

Zusatz: Dabei gilt weiter:

(a) Für jedes $k \geqslant 1$ ist die Anzahl der $1 \leqslant i \leqslant r$ mit $j_i = k$ gleich

$$(*) \qquad 2\dim \operatorname{Kern}(f^k) - \dim \operatorname{Kern}(f^{k-1}) - \dim \operatorname{Kern}(f^{k+1}).$$

(b) Die Diagonalblöcke sind bis auf Vertauschung unabhängig von B.

(c) Die Anzahl r der Jordanblöcke ist die Dimension des Eigenraums $\mathrm{Eig}_0(f)$. = geom. Vielfachheit.

Bew.: (a) ⇒ (b) ✓.

(a), (c): ${}_B[f]_B = \begin{pmatrix} N_{j_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_{j_r} \end{pmatrix}$ $\qquad B = (b_{11}, \ldots, b_{1j_1}, \ldots\ldots, b_{r1}, \ldots, b_{rj_r})$

Setze $V_i := \langle b_{i1}, \ldots, b_{ij_i} \rangle$.

$0 \leftarrow b \leftarrow \ldots \leftarrow$

$\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$, $\quad f^k(V_i) \subset V_i$.

$\Rightarrow \ker(f^k) = \{ v = \sum_{i=1}^r v_i \mid f^k(v) = 0 \} = \bigoplus_{i=1}^r \ker(f^k|_{V_i})$, $\quad v_i \in V_i$, $\quad f^k(v) = \sum f^k(v_i)$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Eig}_0(f) = \dim \ker(f) = \sum_{i=1}^r \dim \ker(f|_{V_i}) = \sum_{i=1}^r \dim \langle b_{i1} \rangle = \sum_{i=1}^r 1 = r$

Analog: $(*) = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\left(2 \dim \ker(f^k|V_i) - \dim \ker(f^{k+1}|V_i) - \dim \ker(f^{k-1}|V_i)\right)}_{=(**)}$

$$f^k(b_{i,l}) = \begin{cases} b_{i,l-k} & \text{falls } k<l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow \ker(f^k|V_i) = \langle\{b_{i,l} \mid 1 \leq l \leq k, j_i\}\rangle$

$\Rightarrow \dim \ker(f^k|V_i) = \min\{k, j_i\}$.

$(**) = 2 \cdot \min\{k, j_i\} - \min\{k+1, j_i\} - \min\{k-1, j_i\}$.

$$= \begin{cases} 1 & \text{falls } k = j_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

$k < j_i$ ✓

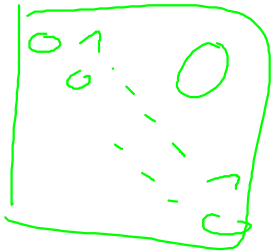
$k > j_i$ ✓

$k = j_i$ ✓

qed.

Beispiel: Jede $n \times n$-Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ \vdots & & & \ddots & a_n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$



mit allen $a_i \neq 0$ ist ähnlich zu N_n.

Bew.: $\mathrm{Eig}_0(A) = \ker(L_A : K^n \to K^n) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow$ geom. Vielf. $= 1$ $\Rightarrow$ genau 1 Jordanblock N_n.

$b_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $(A^{n-1} b_n, A^{n-2} b_n, \dots, A b_n, b_n) =: U$

$\Rightarrow U^{-1} A U = N_n$.

Beispiel: Die folgenden reellen Matrizen haben die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{U} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

geo. Vielf. $= 2$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = 0$; $e_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Ae_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A^2 e_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A^3 e_4 = 0$.

$v := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $Av = 0$.

$U = (A^2 e_4, Ae_4, e_4, v)$

$B^2 = 0$. ; $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $Be_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B^2 e_4 = 0$.

$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $Be_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $V := (Be_3, e_3, Be_4, e_4)$

A^m ?

(a) $A = UDU^{-1}$, D Diagonal $= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^m = UD^mU^{-1}$; $D^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ da $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

folgt aus Induktion über m: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$A = UBU^{-1} \Rightarrow A^m = UB^mU^{-1} = U\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}U^{-1}$.

A beliebige 2×2-Matrix über $\mathbb{C}$. $\Rightarrow \mathrm{char}_A(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow$ siehe (a)

$\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$ geom. Vielfachheit 2 $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow A^m = \begin{pmatrix} \lambda^m & 0 \\ 0 & \lambda^m \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$ geom. Vielfachheit 1 $\Rightarrow A$ trigonalisierbar

$A = UBU^{-1}$, $B = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $c \neq 0$

OBdA $c = 1$

$$\Rightarrow \quad B^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

<u>Beh.</u>: $\boxed{B^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\cdot\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}}$

<u>Bew.</u>: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$

<u>qed</u>.

$$A^n = U B^n U^{-1}$$

A_1, A_2 ähnlich $\Rightarrow \forall n: A_1^n, A_2^n$ ähnlich

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow$

$A_2 = U A_1 U^{-1} \Rightarrow A_2^n = U A_1^n U^{-1}$