Serie 1

1. Auf der Insel der Ritter und Knappen ist jeder Einwohner entweder ein Ritter oder ein Knappe (und jeder kennt den Status von allen anderen Einwohnern). Dabei gilt, dass

   - Ritter immer die Wahrheit sagen;
   - Knappen immer lügen.

   Sie werden nun auf Einwohner der Insel treffen. Ihre Aufgabe ist zu versuchen zu entscheiden, ob sie Ritter oder Knappen sind.

   (a) Sie treffen Johannes und Wilhelm auf der Insel. Johannes sagt: „Wilhelm und ich sind Ritter.“ Wilhelm erwidert: „Das ist eine Lüge, Johannes ist ein Knappe!“ Was sind sie?

   (b) Sie treffen Friedrich und seinen Bruder auf der Insel. Friedrich sagt: „Genau einer von uns ist ein Ritter.“ Was können Sie daraus schliessen?

2. Das *ausschliessende Oder* XOR ist definiert durch die Festsetzung, dass $A \,\mathrm{XOR}\, B$ genau dann wahr sein soll, wenn genau eine der Aussagen A und B wahr ist. Welche der folgenden Aussagen ist äquivalent zu $A \,\mathrm{XOR}\, B$?

   (a) $(A \implies \neg B) \vee (\neg B \implies A)$

   (b) $A \iff \neg B$

   (c) $(\neg A \implies B) \wedge (B \implies \neg A)$

   (d) $(A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$

   (e) $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

   Erklären Sie Ihre Antwort.

3. Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Bilden Sie die Negationen der Aussagen

   (a) $\exists y \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists x \in X \colon |x - y| < \varepsilon \wedge x \neq y$,

   (b) $\forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \colon m < n \implies (\exists x \in X \colon m < x \wedge x < n)$

   und vereinfachen Sie die Ergebnisse soweit wie möglich. (Letzteres bedeutet, dass Sie die Negation so weit wie möglich nach „rechts“ schieben sollen).

   Bemerkungen:
   - Aufgrund der Eigenschaften von $\mathbb{R}$ ist die Negation einer strikten Ungleichung „$a < b$“ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben durch die umgekehrte, nicht-strikte Ungleichung „$a \geqslant b$“.

- „$\forall \varepsilon > 0$“ ist eine Kurzschreibweise für „$\forall \varepsilon \in \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$“. Daher ändert sich dieses Ungleichheitszeichen bei der Negation nicht. D.h. es gilt $\neg(\forall \varepsilon > 0\colon A(\varepsilon)) \iff \exists \varepsilon > 0\colon \neg A(\varepsilon)$ für jede Aussage $A(\varepsilon)$. Analoges gilt für „$\exists \varepsilon > 0$“.

4. Wir nennen eine natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}$ *Primzahl*, falls p genau zwei Teiler in $\mathbb{N}$ besitzt (nämlich 1 und p). Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass unter den Zahlen

$$n! + 2, n! + 3, \dots, n! + n$$

keine Primzahl ist. Hierbei bezeichnet $n! := n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ (sprich: „n Fakultät“) das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen. Folgern Sie, dass es beliebig grosse Primzahllücken gibt.

Bemerkung: „$n! + 2, n! + 3, \dots, n! + n$“ ist zu interpretieren als „$n! + k,\ 2 \leqslant k \leqslant n$“. Insbesondere gibt es für $n = 1$ keine Zahl in dieser Liste, für $n = 2$ nur die Zahl $n! + 2$, etc.

5. (a) Beweisen Sie (am besten ohne vollständige Induktion) für $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

6. Sei $a > 0$. Die *quadratische Ergänzung*

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

führt auf die Lösung der quadratischen Gleichung, dient aber auch der Bestimmung des Minimums der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ auf $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: f nimmt ihr Minimum $m = c - b^2/4a$ für $x = -b/2a$ an. Also, dass

$$f(x) \geqslant f(-b/2a) = m$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ (Ableiten nicht erwünscht).

(b) Finden Sie das Minimum der Funktion von zwei Variablen

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2 + 2x + 4y.$$

(Hinweis: Quadratische Ergänzung bezüglich x, dann bezüglich y).