Serie 10

1. Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, genau dann eine Cauchy-Folge ist, falls für alle $j = 1, \dots d$, $(\pi_j(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Cauchy-Folge ist. Hierbei bezeichnet $\pi_j(x_n)$ die j-te Koordinate des n-ten Folgeglieds.

   Folgern Sie aus dem entsprechenden Satz für reelle Cauchy-Folgen, dass eine Folge in $\mathbb{R}^d$ genau dann konvergiert, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

   Bemerkung: Insbesondere ist eine Folge $(z_n)_{n\in N}$ in $\mathbb{C}$ eine Cauchy-Folge, genau dann wenn die beiden reellen Folgen $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ sind.

2. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren).

   (a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - x - 2}{x-2}$,

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x-2}$.

3. Seien $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt von D und $f_i, g_i \colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen mit

$$f_1(x) = O(g_1(x)),\ f_2(x) = o(g_2(x)) \quad (x \to x_0).$$

   Beweisen Sie

$$f_1(x) f_2(x) = o\big(g_1(x) g_2(x)\big) \quad (x \to x_0).$$

   Bemerkung: $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ist definitionsgemäss genau dann ein Häufungspunkt von D, wenn $\dot{U}_\delta(x_0) \cap D \neq \varnothing$ für jedes $\delta > 0$ gilt, wobei $\dot{U}_\delta(x_0)$ die punktierte δ-Umgebung von x_0 ist. Da wir diese Umgebungen auch für $x_0 = \pm\infty$ definiert haben (nämlich als $\dot{U}_\delta(\infty) = \big(\frac{1}{\delta}, \infty\big)$ und $\dot{U}_\delta(-\infty) = \big(-\infty, -\frac{1}{\delta}\big)$), erklärt dies auch, wann ∞ oder $-\infty$ ein Häufungspunkt von D ist. Ausformuliert erhalten wir: ∞ ist genau dann ein Häufungspunkt von D, wenn D nicht nach oben beschränkt ist, und $-\infty$ ist ein Häufungspunkt von D, wenn D nicht nach unten beschränkt ist.

4. Zeigen Sie, dass die Grenzwerte

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)^2}\right)$,

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=nq}^{np-1} \dfrac{1}{k} \qquad (p, q \in \mathbb{N},\ q < p)$

existieren und geben Sie Formeln für sie an (auch wenn wir diese Formeln zur Zeit noch nicht berechnen können).

5. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir definieren

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f| \, \mathrm{d}x$$

für (reellwertige) Riemann-integrierbare Funktionen $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

   (a) Ist $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf $\mathcal{R}([a, b])$?

   (b) Zeigen Sie, dass $C([a, b])$ mit $\|\cdot\|_1$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist. Sie dürfen dafür Aussagen früherer Übungsaufgaben verwenden.

   (c) Belegen Sie anhand eines Beispiels, dass es in $C([a, b])$ Cauchy-Folgen bzgl. $\|\cdot\|_1$ gibt, welche in $C([a, b])$ keinen Grenzwert bzgl. $\|\cdot\|_1$ besitzen.

Bemerkung: Teil c) besagt kürzer ausgedrückt, dass $C([a, b])$ mit der Norm $\|\cdot\|_1$ nicht vollständig ist. Später im Studium werden Sie den Vektorraum $L^1([a, b])$ kennenlernen, welcher $C([a, b])$ umfasst und mit der Norm $\|\cdot\|_1$ vollständig ist.

6. Berechnen Sie für $q \in (0, 1)$ den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) q^n,$$

und begründen Sie Ihre Rechnung <u>formal</u>.

Hinweis: Benutzen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ und quadrieren Sie beide Seiten.

7. Multiple-Choice-Fragen (ohne Wertung im Bonussystem)

Bemerkung: Mehrere Antworten können richtig sein!

   (a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann können wir die Existenz von $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (Grenzwert der Funktion f für $x \to \infty$) und $\lim_{n\to\infty} f(n)$ (Grenzwert der Folge $(f(n))_n$) untersuchen. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

      i. Existiert $\lim_{x\to\infty} f(x)$, so existiert auch $\lim_{n\to\infty} f(n)$ und die beiden Grenzwerte stimmen überein.

      ii. Existiert $\lim_{n\to\infty} f(n)$, so existiert auch $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und die beiden Grenzwerte stimmen überein.

      iii. Existiert $\lim_{n\to\infty} f(n)$ und ist f stetig, so existiert auch $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und die beiden Grenzwerte stimmen überein.

      iv. Existiert $\lim_{n\to\infty} f(n)$ und ist f monoton, so existiert auch $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und die beiden Grenzwerte stimmen überein.

(b) Seien $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. In welchen der folgenden Fälle folgt die Stetigkeit von f in x_0?

i. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert

ii. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

iii. x_0 ist links- und rechtsseitiger Häufungspunkt von D und f ist in x_0 links- und rechtsseitig stetig

iv. x_0 ist kein rechtsseitiger Häufungspunkt von D und es gilt $\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$

(c) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ist das Folgende ein korrekter Beweis der Aussage, dass jede Funktion $f \in C([a, b])$ beschränkt ist?

Angenommen f wäre nicht beschränkt. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a, b]$ mit $|f(x_n)| \geqslant n$. Wähle eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$ mit Grenzwert $x_0 \in [a, b]$. Es folgt $|f(x_0)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| \geqslant \lim_{k\to\infty} n_k = \infty$, ein Widerspruch.

i. Ja.

ii. Nein.

(d) Was ist der Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}?$$

i. $-1/3$

ii. $2/3$

iii. 1

iv. 2