Serie 11

1. Zeigen Sie, dass das Cauchy-Produkt der bedingt konvergenten Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$
mit sich selbst divergiert.

   Bemerkung: Das *Cauchy-Produkt* zweier Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} s_n$ mit Summanden $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

2. Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} z^n,$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n2^n}}{(n+1)^6} z^n,$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^{n^2}.$

3. Entscheiden Sie für die Funktionenfolgen $f_n, g_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f_n(x) := \frac{1}{1+nx}, \quad g_n(x) := \frac{x}{1+nx} \qquad (n \in \mathbb{N},\, x \in [0,1])$$
ob diese punktweise bzw. gleichmässig konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion.

4. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R, welche $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n < \infty$ erfüllt. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Funktion
$$\overline{B_R(0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
wohldefiniert und stetig ist.

5. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge monotoner Funktionen, die punktweise gegen eine stetige Funktion $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert.

   (a) Zeigen Sie, dass $(f_n)_n$ gleichmässig gegen f konvergiert.

(b) Belegen Sie durch Gegenbeispiele, dass in a) weder auf die Monotonie der f_n noch auf die Stetigkeit der Grenzfunktion f verzichtet werden kann.

6. Sei $(a_n)_n$ eine Folge positiver reeller Zahlen, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ eine Bijektion. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n \in \{\varphi \leqslant x\}} a_n := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{1}_{\{\varphi \leqslant x\}}(n).$$

(Hierbei ist $\{\varphi \leqslant x\}$ eine Kurzschreibweise für die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) \leqslant x\}$.)

(a) Zeigen Sie, dass f wohldefiniert und streng monoton wachsend ist.

(b) Bestimmen Sie für $x_0 \in \mathbb{R}$ die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow x_0} f(x).$$

(c) Folgern Sie, dass f rechtsseitig stetig und in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist, und dass jeder Punkt $x \in \mathbb{Q}$ eine Sprungstelle von f mit Sprunghöhe $a_{\varphi^{-1}(x)}$ ist.

Bemerkung: Ist x_0 Sprungstelle einer Funktion f, so ist die *Sprunghöhe* von f in x_0 der Wert

$$\left| \lim_{x \nearrow x_0} f(x) - \lim_{x \searrow x_0} f(x) \right|.$$

7. Multiple-Choice-Fragen (ohne Wertung im Bonussystem)

Bemerkung: Mehrere Antworten können richtig sein!

(a) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(\sqrt[3]{n}+1)^n}$$

ist...

i. ...divergent.
ii. ...konvergent.
iii. ...absolut konvergent.
iv. ...bedingt konvergent.

(b) Sei $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen, die gleichmässig gegen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

i. Falls g stetig ist, so konvergiert $g \circ f_n$ gleichmässig gegen $g \circ f$.

ii. Falls g gleichmässig stetig ist, so konvergiert $g \circ f_n$ gleichmässig gegen $g \circ f$.
iii. Falls g stetig ist, so konvergiert gf_n gleichmässig gegen gf.
iv. Falls g gleichmässig stetig ist, so konvergiert gf_n gleichmässig gegen gf.

(c) Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen und definiere

$$r_n := \sum_{k=n^2}^{n^2+2n} a_k$$

für $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen korrekt?

i. Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist auch die Folge $(r_n)_n$ konvergent.
ii. Ist die Folge $(r_n)_n$ konvergent, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
iii. Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ konvergent, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

(d) Sei I eine abzählbar unendliche Indexmenge und $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie nichtnegativer reeller Zahlen. Wir wollen

$$\sum_{i\in I} a_i := \sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)},$$

definieren, wobei $\psi\colon \mathbb{N} \to I$ eine beliebige Bijektion ist. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

i. Diese Definition ist nicht sinnvoll, da der Wert einer Reihe auf die Summationsreihenfolge ankommt. Der Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ hängt also von der Wahl von ψ ab.
ii. Diese Definition ist nur dann sinnvoll, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ konvergent ist. Denn dann ist diese Reihe wegen $a_i \geqslant 0$ auch absolut konvergent und die Summationsreihenfolge spielt keine Rolle, sodass der Wert von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ unabhängig von der Wahl von ψ ist.
iii. Diese Definition ist stets sinnvoll, da auch im Fall $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)} = \infty$ die Summationsreihenfolge keine Rolle spielt.

(e) Sei $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1/n}$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

i. Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ konvergiert punktweise.
ii. Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ konvergiert gleichmässig.