Serie 12

1. Wir erinnern daran, dass wir den reellen Logarithmus als die inverse Abbildung von der bijektiven Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ definierten. Wir wollen dies nun wiederholen und den Logarithmus für komplexe Zahlen definieren. Leider gibt es hier aber ein fundamentales Problem: die Exponentialabbildung ist auf der komplexen Zahlenebene ganz und gar nicht bijektiv, da beispielsweise $\exp(2n\pi i) = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Aus diesem Grund müssen wir die Exponentialabbildung auf eine geeignete Teilmenge D von $\mathbb{C}$ einschränken, so dass die eingeschränkte Abbildung $\exp : D \to \mathbb{C}^\times$ bijektiv ist. Dies bedingt, dass es keine natürliche Definition allgemeiner komplexer Potenzen gibt, da bei der Definition ein komplexer Logarithmus ausgewählt werden müsste. Wir wollen in dieser Aufgabe ein hieraus resultierendes Problem aufzeigen. Wir definieren

$$D_{\text{Haupt}} := \{x + y\mathrm{i} \mid x \in \mathbb{R},\, y \in (-\pi, \pi]\}$$

und den *Hauptzweig* des Logarithmus

$$\log\colon \mathbb{C}^\times \to D_{\text{Haupt}}$$

als die Umkehrabbildung der bijektiven Abbildung $\exp|_{D_{\text{Haupt}}}\colon D_{\text{Haupt}} \to \mathbb{C}^\times$. In diesem Fall entsprechen $x \in \mathbb{R}$ und $y \in (-\pi, \pi]$ mit $\exp(x + yi) = z \in \mathbb{C}$ fast der Polarkoordinatendarstellung von $z = re^{\theta i} \in \mathbb{C}^\times$ in Lemma 7.81 mit $r = \exp(x)$, wobei wir einen Winkel $\theta \in [0, \pi]$ unverändert lassen, aber einen Winkel $\theta \in (\pi, 2\pi)$ durch $\theta - 2\pi \in (-\pi, 0)$ ersetzen.

Für $z \in \mathbb{C}^\times$ und $a \in \mathbb{C}$ versuchen wir nun eine komplexe Potenz $P(z, a)$ durch

$$P(z, a) := \exp(a \log(z))$$

zu definieren. Belegen Sie anhand eines Beispiels, dass die aus dem Reellen bekannte Potenzrechenregel $x^a y^a = (xy)^a$ für P nicht gilt, also dass

$$P(z, a)P(w, a) = P(zw, a)$$

nicht für alle $a \in \mathbb{C}$ und $z, w \in \mathbb{C}^\times$ erfüllt ist.

2. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von de l'Hospital (falls sie existieren).

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(ax)}{1 - \cos(x)}$

(c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$

3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit beschränkter Ableitung.

   (a) Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist.

   (b) Folgern Sie, dass stetig differenzierbare Funktionen auf kompakten Intervallen Lipschitz-stetig sind.

4. In dieser Aufgabe konstruieren wir eine sogenannte *Hutfunktion*, d.h. eine glatte Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ sowie $\varphi|_{\mathbb{R}\setminus(-2,2)} = 0$ und $\varphi|_{[-1,1]} = 1$ erfüllt. Dazu verwenden wir die Funktion

$$\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

   aus Beispiel 8.23 im Skript.

   (a) Lesen Sie dieses Beispiel und verstehen Sie warum ψ glatt ist.

   Wir setzen

$$\varphi_0(x) := \frac{\psi(x)}{\psi(x) + \psi(1-x)} \quad \text{und} \quad \varphi(x) := \varphi_0(2+x)\varphi_0(2-x)$$

   für $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Beweisen Sie, dass die so definierte Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gewünschten Eigenschaften hat.

5. Bestimmen Sie alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, in denen die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$$

   konvergiert.

   Hinweis: Abel-Summation.

6. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres, offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

   (a) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt in I links- und rechtsseitig differenzierbar ist, dass die einseitigen Ableitungen $f'_+, f'_-\colon I \to \mathbb{R}$ monoton wachsend sind und dass $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$ für $x_0 \in I$ gilt.

   (b) Folgern Sie, dass f stetig und in allen ausser höchstens abzählbar vielen Punkten differenzierbar ist.

7. Multiple-Choice-Fragen (ohne Wertung im Bonussystem)

Bemerkung: Mehrere Antworten können richtig sein!

(a) Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien A respektive B. Definiere für $n \in \mathbb{N}_0$

$$c_n := \begin{cases} a_{n/2}, & n \text{ gerade}, \\ b_{(n-1)/2}, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Was ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$?

i. $\min(A, B)$
ii. $\max(A, B)$
iii. $\min(\sqrt{A}, \sqrt{B})$
iv. $\max(\sqrt{A}, \sqrt{B})$
v. $\min(A^2, B^2)$
vi. $\max(A^2, B^2)$

(b) Welche der folgenden Aussagen über die komplexe Exponentialabbildung $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ treffen zu?

i. exp ist injektiv.
ii. $\exp|_{\mathbb{R}}$ ist injektiv.
iii. $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\times}$.
iv. $\exp|_{i\mathbb{R}}$ ist beschränkt.

(c) Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty)$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

i. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$.
ii. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert für zumindest ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$.
iii. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$.
iv. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergiert für zumindest ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$.
v. Keine der obigen Aussagen.

(d) Sei U eine nichtleere, offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $\mathcal{D}(U)$ die Menge aller differenzierbaren Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

i. $\mathcal{D}(U)$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(U)$.
ii. Die Ableitungsabbildung $\mathcal{D}(U) \to \mathcal{F}(U)$, $f \mapsto f'$ ist linear.
iii. $\mathcal{D}(U)$ ist unendlichdimensional.
iv. Der Kern der Ableitungsabbildung $\mathcal{D}(U) \to \mathcal{F}(U)$ besteht genau aus den konstanten Funktionen auf U.

(e) Welche der folgenden Aussagen über die reellen trigonometrischen Funktionen $\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ treffen zu?

i. $\sin$ und $\cos$ sind 2π-periodisch.

ii. Für $x \in (-\pi/3, \pi/3)$ gilt $\sin(x) < \cos(x)$.

iii. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin\big([x - \pi/2, x + \pi/2)\big) \cup \cos\big([x, x + \pi)\big) = [-1, 1]$.

iv. Es gilt $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(f) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

i. Ist $f'(x) \geqslant 0$ für alle $x \in I$, so ist f monoton wachsend.

ii. Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton wachsend.

iii. Ist f monoton wachsend, so gilt $f'(x) \geqslant 0$ für alle $x \in I$.

iv. Ist f streng monoton wachsend, so gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$.

(g) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

i. Ist f differenzierbar, so ist f gleichmässig stetig.

ii. Ist f differenzierbar in $a \in I$, so ist f stetig in a.

iii. Ist f stetig, so ist f in mindestens einem Punkt von I differenzierbar.

iv. Ist f gleichmässig stetig, so ist f in mindestens einem Punkt von I differenzierbar.

(h) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Dann ist f streng monoton.

i. Dies gilt im Allgemeinen.

ii. Dies gilt nicht im Allgemeinen. Die Aussage stimmt aber, wenn f stetig differenzierbar ist.

iii. Selbst für stetig differenzierbares f gilt dies nicht im Allgemeinen.