D-MATH, D-PHYS, D-CHAB | Analysis I | HS21, 14. Dezember 2021

Prof. Manfred Einsiedler

Serie 13

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' - \left(\frac{4}{x} + 1\right) y = x^4,\ y(1) = 1.$$

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, derart, dass $f(x) = f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

   (a) Zeigen Sie, dass eine reelle Zahl c existiert, mit $f(x) = c \cdot \exp(x)$.

   (b) Was passiert, falls f nur Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ anstatt $\mathbb{R}$ hat und ebenfalls $f' = f$ erfüllt?

3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a := \inf(I) \in I$. Sei des Weiteren $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $y : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$y'(x) \leqslant f(x)y(x)$$

   für alle $x \in I$. Beweisen Sie für $x \in I$ die Ungleichung

$$y(x) \leqslant y(a) \exp\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

   Hinweis: Vergleichen Sie y mit einer Lösung z der Differentialgleichung $z' = f(x)z$.

4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass für stetig differenzierbare Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ der *Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung*

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

   gilt. Zeigen Sie, dass diese Formel auch dann gültig ist, wenn nur vorausgesetzt wird, dass $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und die Ableitung $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist.

   Hinweis: Betrachten Sie geeignete Riemann-Summen für f'.

5. Zeigen Sie, dass Ableitungen die *Zwischenwerteigenschaft* besitzen: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so nimmt f' jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an.

   Hinweis: Betrachten Sie für einen Wert c zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ die Funktion $g(x) = f(x) - cx$.

6. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$. Wenn $M \geqslant 0$ derart, dass $|f'(x)| \leqslant M|f(x)|$ für alle $x \in [0,1]$ existiert, dann zeigen Sie $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

   Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen $g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g = f^2$ und $h(x) = \exp(-2Mx)g(x)$. Zeigen Sie, dass $h = 0$ ist und schliessen Sie dann $g = 0$, $f = 0$.

7. Multiple-Choice-Fragen (ohne Wertung im Bonussystem)

   Bemerkung: Mehrere Antworten können richtig sein!

   (a) Sei $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Welche der folgenden Formeln für die Ableitung des Tangens in x sind korrekt?

      i. $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
      ii. $\tan'(x) = \dfrac{1}{\sin^2(x)}$
      iii. $\tan'(x) = \dfrac{1}{1+\tan^2(x)}$
      iv. $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$

   (b) Sei $y \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Formeln für die Ableitung des Arkustangens in y sind korrekt?

      i. $\arctan'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
      ii. $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1-y^2}$
      iii. $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$
      iv. $\arctan'(y) = 1 + \arctan^2(y)$

   (c) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

      i. Ist $x_0 \in I$ ein lokales Extremum von f, so gilt $f'(x_0) = 0$.
      ii. Ist $x_0 \in I$ kein Endpunkt von I und gilt $f'(x_0) = 0$, so ist x_0 ein lokales Extremum von f.
      iii. Seien $a := \inf(I)$ und $b := \sup(I)$. Dann liegen alle lokalen Extrema von f in der Menge $\{a, b\} \cup \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$.
      iv. Sei $a := \inf(I) \in I$. Dann ist a ein lokales Extremum von f.

   (d) Für eine nichtleere, offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^\times$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(U)$ die Menge der reellwertigen Lösungen der Differentialgleichung

$$y' - \left(\frac{4}{x} + 1\right) y = 0$$

auf U. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

i. Ist $I \subset \mathbb{R}^\times$ ein nichtleeres, offenes Intervall, so ist $\mathcal{L}(I)$ ein eindimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$.

ii. Ist $I = \mathbb{R}_{>0}$ oder $I = \mathbb{R}_{<0}$, so gilt für jedes $y \in \mathcal{L}(I)$

$$\lim_{x \to 0} y(x) = \lim_{x \to 0} y'(x) = 0.$$

iii. Die Menge $\mathcal{L}(\mathbb{R}^\times)$ ist ein eindimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$.

iv. Jede Funktion $y \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^\times)$ besitzt eine stetig differenzierbare Fortsetzung $\bar{y}$ auf ganz $\mathbb{R}$.

v. Jede Funktion $y \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^\times)$ besitzt eine glatte Fortsetzung $\bar{y}$ auf ganz $\mathbb{R}$.

(e) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

i. Ist I kompakt und f Riemann-integrierbar, so besitzt f eine Stammfunktion.

ii. Ist f stetig, so besitzt f eine Stammfunktion.

iii. Ist f differenzierbar, so besitzt f eine Stammfunktion.

iv. Besitzt f eine Stammfunktion, so ist f differenzierbar.

v. Besitzt f eine Stammfunktion, so ist f stetig.

vi. Besitzt f eine Stammfunktion und ist I kompakt, so ist f Riemann-integrierbar.

(f) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := \begin{cases} 1/n, & n \equiv 1 \text{ oder } 2 \bmod 4, \\ -1/n, & n \equiv 0 \text{ oder } 3 \bmod 4. \end{cases}$$

Was ist der Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

i. $\pi/4 + \log(2)$

ii. $\pi/2 - \log(2)$

iii. $\pi/4 + \log(2)/2$

iv. $\pi/8 - 2\log(2)$