D-MATH, D-PHYS, D-CHAB | Analysis I | HS21, 24. Dezember 2021
Prof. Manfred Einsiedler

Serie 14

Bemerkung: Für diese Serie sind keine Abgabe und keine Vorträge für Bonuspunkte möglich.

1. Wie in der Vorlesung besprochen, kann man bei der Differentialgleichung $dy/dx = f(y)g(x)$ das *Separieren der Variablen* anwenden, d.h. man multipliziert mit dx, dividiert durch $f(y)$, integriert auf beiden Seiten, und löst die resultierende Gleichung nach y auf.

   Beweisen Sie, dass eine durch dieses Verfahrens gefundene differenzierbare Lösungsfunktion y, für die auch $f(y) \neq 0$ ist, in der Tat eine Lösung der Differentialgleichung darstellt. (Allerdings behaupten wir weder, dass eine mittels dieser Methode gefundenen Lösung für ein Anfangswertproblem eindeutig ist, noch dass diese Methode alle Lösungen der Differentialgleichung findet. Beide Aussagen sind im Allgemeinen falsch.)

   Hinweis: Nehmen Sie an, dass $F(y)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{f(y)}$ (bzgl. der Variable y) und G ist eine Stammfunktion von $g(x)$ ist. Nehmen Sie an, dass y differenzierbar und $f(y) \neq 0$ auf einem Intervall ist, so dass $F(y) = G(x) + C$ für eine Konstante C. Nun verwenden Sie die Kettenregel.

2. Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$$

3. (a) Zeigen Sie, dass der Grenzwert

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \right)$$

   existiert und dass $\gamma \in [0, 1]$ gilt. Die Zahl γ wird als *Euler-Mascheroni-Konstante* bezeichnet.

   (b) Es sei

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, & x > 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

   die Gauß-Abbildung. Beweisen Sie

$$\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x = 1 - \gamma.$$

4. Berechnen Sie mit partieller Integration
   (a) das unbestimmte Integral $\int x^2 \sin x \, dx$,
   (b) rekursive Formeln für folgende unbestimmte Integrale
   $$a_n = \int x^n \exp x \, dx, \qquad b_n = \int x^n \sin x \, dx, \qquad c_n = \int x^n \cos x \, dx$$
   für jedes $n \in \mathbb{N}_0$,
   (c) die unbestimmten Integrale $\int x^a \log x \, dx$ für jedes $a \in \mathbb{R}$. Beachten Sie hierbei, dass der Fall $a = -1$ getrennt zu behandeln ist.
   (d) die Integrale $\int \exp(ax) \sin(bx) \, dx$ für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5. Berechnen Sie die folgenden Integrale durch Substitution

(a)	$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) \, dx$	mit $u = \sqrt{x}$,
(b)	$\int \frac{1}{1+\exp(x)} \, dx$	mit $u = \exp(x)$,
(c)	$\int x\sqrt{1-x^2} \, dx$	mit $u = 1 - x^2$,
(d)	$\int \tan(x) \, dx$	mit $u = \cos(x)$,
(e)	$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{5}{2}}} \, dx$	mit $x = a \tan u$.

6. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe von l'Hôpital's Regel.

   (a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2 \sin(x)}$ (b) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{\cos x - 1}$ (c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 4^x}{\sin \pi x}$

   (d) $\lim_{x \to -\infty} x^3 e^x$ (e) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

7. Machen Sie sich mit folgenden Methoden vertraut, um Grenzwerte zu berechnen:
   - Addition, Multiplikation, Division von Grenzwerten
   - Faktorisieren
   - Stetige Funktion mit Limes vertauschen
   - Sandwich
   - Substituieren
   - l'Hôpital Regel
   - Reihen
   - Zurückführen auf bekannte Limits
   - Konjugation: $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$
   - $a^b = \exp(b \log a)$ für $a > 0$

- Rekursiv definierte monotone Folge

Lösen Sie die folgenden Aufgaben (auf möglichst verschiedene Weise):

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x}$ (2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ (3) $\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(\exp(n^2)-1)}{n}$

(4) $a_0 = 2, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$ (5) $\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$ (6) $\lim_{x\searrow 0} \sqrt{x}\exp\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$

(7) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$ (8) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+\sin x}$ (9) $\lim_{x\searrow 0} (1+2x)^{\frac{4}{x}}$

(10) $\lim_{x\searrow 0} \sin(x)^x$ (11) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (12) $\lim_{x\searrow 0} \left(x^{\frac{1}{x}} + x^{-\frac{1}{x}}\right)$.

8. Hier sind weitere Integrale mit denen Sie die Methoden aus Vorlesung und Skript üben können. Sie dürfen zielführende Ansätze im Forum unter *Serie 14* teilen, oder auch Ihre Lösung z.B. mit WolframAlpha überprüfen.

Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung von (2) die Halbwinkelmethode: Substituieren Sie $u = \tan\frac{x}{2}$ und zeigen Sie, dass $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$ und $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.

(1) $\int_0^3 \exp(\sqrt{x+1})dx$ (2) $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)+\tan^2(x)}dx$ (3) $\int_0^1 e^{-2x}\cos(2\pi x)dx$

(4) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}$ (5) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}+1}dx$ (6) $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

(7) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}dx$ (8) $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(2x)dx$ (9) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$

(10) $\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x}}$ (11) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx$ (12) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}dx$

(13) $\int_7^{26} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}dx$ (14) $\int_0^{\pi/3} \cos^5(x)\sin(x)dx$ (15) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)}dx$

(16) $\int_2^3 \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2}dx$ (17) $\int_0^1 \frac{dx}{2\cosh(x)+\sinh(x)+1}$ (18) $\int_1^2 \frac{x^2\log(x)}{(x^3+1)^3}dx$

(19) $\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ (20) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(x^3-1)^2}$ (21) $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)}dx$

(22) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}dx$ (23) $\int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$ (24) $\int_1^2 (x^2+1)\log(x)dx$

(25) $\int_0^{1/2} (\arcsin(x))^2 dx$ (26) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)} dx$ (27) $\int_1^2 \log^2(x) dx$

(28) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx$ (29) $\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+1} dx$ (30) $\int_0^1 \frac{x^5+x^3+x}{x^4+1} dx$

(31) $\int_0^1 \frac{x^5}{(x+1)(x^3+1)} dx$ (32) $\int_0^1 \frac{x^3(1-x^2)}{(1+x^2)^3} dx$ (33) $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$

(34) $\int_1^2 \frac{dx}{1+\sqrt{2x-x^2}}$ (35) $\int_0^1 \frac{\cosh(x)}{e^x+1} dx$ (36) $\int_0^1 \arctan(x) dx$

(37) $\int_0^{\pi/2} \sin^4(x) dx$ (38) $\int_0^{\pi/2} \sin^5(x) dx$ (39) $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin^2(x) dx$

(40) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2(x)\cos^2(x)} dx$ (41) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+2\sin(x)} dx$ (42) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos(x)}$

(43) $\int_0^{\pi/3} \frac{\tan(x)}{1+\sin^2(x)} dx$ (44) $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)} dx$ (45) $\int_1^e \sin(\log(x)) dx$

(46) $\int_1^2 \frac{\log(x)}{(1+x)^2} dx$ (47) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}} dx$ (48) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

(49) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} dx$ (50) $\int_0^1 \sqrt{x^3+x^4} dx$