Prof. Manfred Einsiedler

Serie 2

1. Finden Sie je ein Beispiel für eine Relation auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die von den Eigenschaften einer Äquivalenzrelation

   (a) nur die Symmetrie;

   (b) nur die Transitivität;

   (c) die Reflexivität und die Transitivität, aber nicht die Symmetrie

   erfüllt.

2. Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Welche der folgenden Abbildungen sind surjektiv, welche sind injektiv? Begründen Sie in ganzen Sätzen warum. In der Mathematik ist es wichtig, dem Leser zu helfen, den Lösungsweg einfach lesbar zu präsentieren. Wir geben ein Beispiel an:

   Sei $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Abbildung gegeben durch $n \mapsto 2n - 1$.

   Lösung. Die Abbildung f_1 ist injektiv: Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit gleichem Bild unter f_1, also $2n - 1 = 2m - 1$. Daraus folgt $2(n - m) = 0$. Wir folgern, dass $n - m = 0$, also $n = m$ sein muss.

   Die Abbildung f_1 ist nicht surjektiv: Die Zahl $2n$ ist immer eine gerade Zahl und darum $2n - 1$ immer eine ungerade Zahl. Darum liegt zum Beispiel die Zahl 2 nicht im Bild von f_1. $\square$

   Untersuchen Sie nun die folgenden Funktionen auf Injektivität und Surjektivität:

   (a) $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, wobei $n \mapsto \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, und $\lfloor x \rfloor$ die grösste ganze Zahl $\leqslant x$ bezeichnet.

   (b) $f_3 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, wobei $(n, m) \mapsto 2^{n-1}(2m - 1)$.

3. Seien X, Y, Z Mengen und $f\colon X \to Y$ sowie $g\colon Y \to Z$ Funktionen.

   (a) Zeigen Sie, dass g surjektiv ist, falls $g \circ f$ surjektiv ist.

   (b) Zeigen Sie, dass f injektiv ist, falls $g \circ f$ injektiv ist.

   (c) Folgern Sie, dass f bijektiv ist, falls f eine Umkehrabbildung besitzt. (Genauer: Falls eine Abbildung $h\colon Y \to X$ existiert mit $h \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ h = \mathrm{id}_Y$, dann ist f bijektiv und es gilt $h = f^{-1}$.)

4. Sei X eine nichtleere Menge. Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi\colon \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}^X,\ A \mapsto \mathbb{1}_A,$$

   die einer Teilmenge $A \subset X$ deren charakteristische Funktion $\mathbb{1}_A$ zuordnet. Zeigen Sie auf die folgenden beiden Arten, dass Φ bijektiv ist:

(a) indem Sie direkt verifizieren, dass Φ injektiv und surjektiv ist;

(b) unter Verwendung von Aufgabe 3 (c), indem Sie explizit eine Umkehrabbildung angeben.

Folgern Sie, dass für jede Menge X die Mengen $\mathcal{P}(X)$ und $\{0,1\}^X$ gleichmächtig sind.

Erinnerung: Mit Y^X bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen $X \to Y$. Hier ist also speziell $\{0,1\}^X$ die Menge aller Abbildungen $X \to \{0,1\}$.

5. (a) Sei X eine unendliche Menge. Zeigen Sie, dass es eine Injektion $\mathbb{N} \to X$ gibt.
   (b) Folgern Sie aus Teil (a), dass jede Menge X entweder endlich, abzählbar unendlich, oder überabzählbar ist.

6. Wir betrachten die Menge $\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{N}) := \{Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |Y| < \infty\}$ aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{N})$ abzählbar unendlich ist. Sie dürfen die eindeutige Binärdarstellung oder die eindeutige Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen verwenden.

7. Multiple-Choice-Fragen (ohne Wertung im Bonussystem)

   Bemerkung: Mehrere Antworten können richtig sein!

   (a) Seien X, Y Mengen und $A, A' \subset X$ sowie $B, B' \subset Y$ Teilmengen. Sei weiters $*$ eine Mengenoperation. In welchen Fällen gilt
   $$(A * A') \times (B * B') = (A \times B) * (A' \times B')?$$
      i. $* = \cap$
      ii. $* = \cup$
      iii. $* = \smallsetminus$
      iv. $* = \triangle$, wobei die *symmetrische Differenz* $C \triangle D$ zweier Mengen $C, D \subset Z$ per Definition aus genau den Elementen von Z besteht, die in genau einer der Mengen C, D enthalten sind.

   (b) Seien X, Y Mengen, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $A \subset X$, $B \subset Y$ Teilmengen. Welche der folgenden Aussagen sind immer wahr?
      i. $A \subset f^{-1}(f(A))$
      ii. $A \supset f^{-1}(f(A))$
      iii. $B \subset f(f^{-1}(B))$
      iv. $B \supset f(f^{-1}(B))$

   (c) Seien X, Y, Z Mengen und $f\colon X \to Y$ sowie $g\colon Y \to Z$ Funktionen. Welche der folgenden Schlüsse gelten allgemein?
      i. Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist f surjektiv.

ii. Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist g injektiv.

iii. Wenn $f^{-1}(f(A)) = A$ für jede Teilmenge $A \subset X$ gilt, dann ist f injektiv.

iv. Wenn $f(f^{-1}(B)) = B$ für jede Teilmenge $B \subset Y$ gilt, dann ist f surjektiv.

(d) Seien A, B endliche Teilmengen einer Menge X. Welche der folgenden Formeln sind richtig?

i. $|A \cup B| = |A| + |B|$

ii. $|A \cap B| = \min\{|A|, |B|\}$

iii. $|A \times B| = |A||B|$

iv. $|B^A| = |B|^{|A|}$, falls $A, B \neq \varnothing$