Serie 3

1. Seien $p, q \in \mathbb{R}$. Wann hat die quadratische Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0$$

   (a) eine Lösung in $\mathbb{R}$? Zeigen Sie in diesem Fall, dass die Lösungen genau die beiden Zahlen

$$z_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{und} \quad z_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

   sind.

   (b) eine Lösung in $\mathbb{C}$? Zeigen Sie, dass auch in diesem Fall z_1 und z_2 Lösungen sind, wobei nach Konvention $\sqrt{a} := \mathrm{i}\sqrt{-a}$ für $a \in \mathbb{R}$ mit $a < 0$ definiert ist.

   Bemerkung: Die Aussage dieser Aufgabe stimmt auch für $p, q \in \mathbb{C}$, sobald man Wurzeln aus beliebigen komplexen Zahlen zur Verfügung hat.

2. In Kapitel 2.1 des Skripts werden die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ axiomatisch eingeführt. Zeigen Sie unter Verwendung der Axiome (1)–(9) und der Folgerungen (a)–(l):

   (a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten $(-x)y = x(-y) = -(xy)$ und $(-x)(-y) = xy$.

   (b) Ist $x \in \mathbb{R}^\times$, so ist auch $-x \in \mathbb{R}^\times$ und es gilt $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$.

3. Seien $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie unter Verwendung der Axiome (1)–(15) und der Folgerungen (a)–(v):

   (a) Gelten $0 \leqslant x \leqslant y$ und $0 \leqslant z \leqslant w$, so folgt $0 \leqslant xz \leqslant yw$.

   (b) Gelten $xz \leqslant yz$ und $z > 0$, so folgt $x \leqslant y$.

   Was passiert in b), wenn man die Forderung $z > 0$ fallen lässt? Betrachten Sie die Fälle $z = 0$ und $z < 0$.

4. Wir betrachten die komponentenweise Addition $+$ und Multiplikation $*$ auf $\mathbb{R}^2$, d.h. wir setzen

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1 x_2, y_1 y_2).$$

   für $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2$ mit den Operationen $+$ und $*$ kein Körper ist.

Wir definieren die Multiplikation nun stattdessen durch

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Mit den Operationen $+$ und $\cdot$ ist $\mathbb{R}^2$ dann ein Körper, wie Sie demnächst in der Vorlesung sehen werden. Wir werden ihn den *Körper der komplexen Zahlen* nennen und mit $\mathbb{C}$ bezeichnen. Ist $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, so schreiben wir $\operatorname{Re} z := x$ und $\operatorname{Im} z := y$.

(b) Auf $\mathbb{C}$ betrachten wir die Relation $\preceq$ definiert durch

$$z \preceq w :\Longleftrightarrow (\operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w) \vee (\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w \wedge \operatorname{Im} z \leqslant \operatorname{Im} w)$$

für $z, w \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie, dass $\preceq$ eine lineare Ordnung auf $\mathbb{C}$ definiert. Welche der Axiome (14) und (15) erfüllt $\preceq$?

5. Für a, b in einem Körper K mit $b \neq 0$ definieren wir

$$\frac{a}{b} := ab^{-1}.$$

Seien nun $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $xyz > 0$. Beweisen Sie, dass

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} \geqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

6. Sei K ein Körper und $L \subset K$. Wir nennen L einen *Unterkörper* (oder *Teilkörper*) von K, falls

- $0, 1 \in L$,
- $x + y, xy \in L$ falls $x, y \in L$,
- $-x \in L$ falls $x \in L$, und
- $x^{-1} \in L$ falls $x \in L^\times = L \setminus \{0\}$.

Wir betrachten nun die Teilmenge $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

(a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ der kleinste Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist, der $\mathbb{Q}$ und $\sqrt{2}$ enthält.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit den von $\mathbb{R}$ induzierten Operationen $+$ und $\cdot$ und der induzierten Ordnung $\leqslant$ ein angeordneter Körper ist (d.h. Axiome (1)–(15) gelten), der jedoch nicht ordnungsvollständig ist (d.h. Axiom (16) gilt nicht).

Challenge (ohne Wertung im Bonussystem)

(c) Zeigen Sie, dass es auf $\mathbb{Q}$ genau eine Ordnungsrelation $\leqslant$ gibt, mit der $\mathbb{Q}$ ein angeordneter Körper ist.

(d) Wie viele Ordnungsrelationen gibt es auf $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, mit denen $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein angeordneter Körper ist?

7. Multiple-Choice-Fragen (ohne Wertung im Bonussystem)

Bemerkung: Mehrere Antworten können richtig sein!

(a) Sei K ein angeordneter Körper und $x, y, z \in K$ mit $z \geqslant 0$. Welche der folgenden Implikationen sind im Allgemeinen richtig?

i. $xz \leqslant yz \implies x \leqslant y$

ii. $xz < yz \implies x < y$

iii. $x^2 \leqslant y^2 \implies x \leqslant y$

iv. $x \leqslant y \implies x^2 \leqslant y^2$

v. $0 \leqslant x < y \implies x^2 < y^2$

(b) Sei X eine Menge mit $|X| \geqslant 2$. Die Relation $\subset$ auf $\mathcal{P}(X)$ ist...

i. ...eine Äquivalenzrelation.

ii. ...eine lineare Ordnungsrelation.

iii. ...eine Ordnungsrelation, die nicht linear ist.

iv. ...keins der Obigen.

(c) Es bezeichne $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit. Welche der folgenden Formeln sind richtig?

i. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)^4 = 1$

ii. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)^4 = -1$

iii. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3 = 1$

iv. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3 = -1$

(d) Sei $X \subset \mathbb{R}$. Wir sagen, dass $x_0 \in \mathbb{R}$ ein *Maximum* von X ist, falls $x_0 \in X$ und $x \leqslant x_0$ für alle $x \in X$ gilt. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ besitzen ein Maximum?

i. $X_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

ii. $X_2 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$

iii. $X_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$

iv. Keine der obigen Mengen.

(e) Betrachte die Menge

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;\middle|\; x + \frac{8}{x} + 6 \geqslant 0 \right\}.$$

Welche der folgenden Mengen ist gleich X?

i. $(0, \infty) \cup [-8, -6]$

ii. $(0, \infty) \cup [-4, -2]$
iii. $(0, \infty) \cup (-4, -2)$
iv. $(-\infty, -4] \cup [-2, \infty)$
v. $(-\infty, -4] \cup [-2, 0) \cup (0, \infty)$
vi. Keine.

(f) Welche der folgenden Beispiele sind Körper, die angeordnet werden können?

i. $\mathbb{N}$
ii. $\mathbb{Z}$
iii. $\mathbb{Q}$
iv. $\mathbb{R}$
v. $\mathbb{C}$