D-MATH, D-PHYS, D-CHAB | Analysis I | HS21
Prof. Manfred Einsiedler

Serie 4

1. Finden Sie das Infimum und Supremum der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$. Besitzen sie ein Minimum, ein Maximum?

   (a) $A = \{a - b \,|\, a, b \in \mathbb{R}, 1 < a < 2, 3 < b < 4\}$,

   (b) $B = \{\frac{n}{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$,

   (c) $C = \{\frac{n}{m} \,|\, m, n \in \mathbb{N}, m + n \leqslant 10\}$.

2. Schreiben Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen für $z \in \mathbb{C}$ in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) $z = (2 - i)^3$,

   (b) $z = \frac{2-i}{4+3i}$.

   Zeichnen Sie folgende Teilmengen der komplexen Ebene.

   (c) $\big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, 1 \leqslant |z| \leqslant 3\big\}$,

   (d) $\big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \operatorname{Re}(z^2) \geqslant 0\big\}$.

3. Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge. Zeigen Sie, dass $-X := \{-x \mid x \in X\}$ nach oben beschränkt ist und dass $\sup(-X) = -\inf X$.

4. Sei X eine nichtleere Menge und $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit nach oben beschränkten Bildern. Zeigen Sie, dass

$$\sup\{f(x) + g(x) \mid x \in X\} \leqslant \sup\{f(x) \mid x \in X\} + \sup\{g(x) \mid x \in X\}.$$

   Belegen Sie anhand eines Beispiels, dass keine Gleichheit gelten muss.

5. (a) Zeigen Sie, dass offene Bälle in $\mathbb{C}$ offen sind.

   (b) Zeigen Sie, dass Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Teilmengen von $\mathbb{C}$ wiederum offen in $\mathbb{C}$ sind.

6. In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass man die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ über die injektive Abbildung $\mathbb{R} \ni x \mapsto x + 0\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ mit der „x-Achse“ in der Gaußschen Zahlenebene identifizieren kann. Mittels dieser Identifikation können wir beliebige Teilmengen von $\mathbb{R}$ auch als Teilmengen von $\mathbb{C}$ auffassen.

   (a) Zeigen Sie, dass jede in $\mathbb{R}$ abgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ (vgl. Definition 2.49 im Skript) auch als Teilmenge von $\mathbb{C}$ abgeschlossen ist (vgl. Definition 2.55).

   (b) Welche offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind auch als Teilmengen von $\mathbb{C}$ offen?

7. Multiple-Choice-Fragen (ohne Wertung im Bonussystem)

Bemerkung: Mehrere Antworten können richtig sein!

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Welcher Ausdruck entspricht stets $\sqrt{x^2}$?

   i. x
   ii. $\pm x$
   iii. $|x|$
   iv. Keiner der obigen Ausdrücke.

(b) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

   i. $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2}$.
   ii. $\operatorname{Re}(z^2) = (\operatorname{Re} z)^2$.
   iii. $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.
   iv. Aus $z^4 = w^4$ folgt $z = \pm w$.
   v. Keine der obigen Aussagen.

(c) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ offene Teilmengen. Dann ist der Durchschnitt $A \cap B \ldots$

   i. ... offen und nicht abgeschlossen.
   ii. ... offen und abgeschlossen.
   iii. ... offen.
   iv. ... nicht notwendigerweise offen.

(d) Eine Motivation für die Einführung der komplexen Zahlen ist, die Lösbarkeit der Gleichung $z^2 = -1$ zu erreichen. Wie viele Lösungen besitzt diese Gleichung nun in $\mathbb{C}$?

   i. 0
   ii. 1
   iii. 2
   iv. Man braucht mehr Informationen um das zu entscheiden.

(e) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleere, nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

   i. Gilt $A \subset B$, so folgt $\sup A \leqslant \sup B$.
   ii. Gilt $\sup A \leqslant \sup B$, so gibt es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ mit $a \leqslant b$.
   iii. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, wobei $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.
   iv. $\sup(AB) = \sup A \sup B$, wobei $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.
   v. Existiert das Maximum der Menge A, so gilt $\max A = \sup A$.
   vi. Ist $\sup A \in A$, so existiert das Maximum von A.

(f) Betrachten Sie die Menge

$$X = \left\{ \max\left(\frac{(-1)^n}{1+n}, \frac{1}{2^n} \right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

i. $\sup X = 1$
ii. $\max X = 1$
iii. $\sup X = \frac{1}{2}$
iv. $\max X = \frac{1}{2}$
v. $\inf X = 0$
vi. $\min X = 0$
vii. $\inf X = -\frac{1}{2}$
viii. $\min X = -\frac{1}{2}$