Serie 5

1. Finden Sie je ein Beispiel für

   (a) eine unbeschränkte, stetige Funktion auf einem beschränkten Intervall;

   (b) eine unbeschränkte, stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall;

   (c) eine unbeschränkte Funktion auf einem kompakten Intervall, die in höchstens einem Punkt unstetig ist.

   Sie müssen keine Beweise angeben.

2. Welche der folgenden Teilmengen sind offen? Welche abgeschlossen? Begründen Sie.

   (a) Der Punkt $A = \{0\}$ in $\mathbb{R}$,

   (b) Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$,

   (c) Das Intervall $C = [0, \infty)$ in $\mathbb{R}$,

   (d) Das Intervall $D = (0, \infty)$ in $\mathbb{R}$,

   (e) Die Menge $E = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, n > 0 \right\}$ in $\mathbb{R}$,

   (f) Die Menge $F = E \cup \{0\}$ in $\mathbb{R}$,

   (g) Die Halbgerade $G = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \,|\, x \in [0, \infty),\, y = 0\}$ in $\mathbb{C}$,

   (h) Die Halbgerade $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \,|\, x \in (0, \infty),\, y = 0\}$ in $\mathbb{C}$,

   (i) Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

   Hinweis: Verwenden Sie die Tatsache, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, um viele andere irrationale Zahlen zu konstruieren.

3. Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Drücken Sie die Aussagen „f ist nicht stetig in $x_0 \in D$“ und „f ist nicht stetig“ in Prädikatenlogik aus. Zeigen Sie damit, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x+1, & x \geqslant 0, \\ x, & x < 0, \end{cases}$$

   nicht stetig ist.

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Abbildung gegeben durch $f(x) = \inf\{|x-k| \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f und zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.

5. Sei K ein Körper.

   (a) Sei $f \in K[T]$. Zeigen Sie, dass $x \in K$ genau dann eine Nullstelle von f ist, wenn das Polynom $T - x \in K[T]$ ein Teiler von f ist.

   (b) Folgern Sie, dass ein Polynom $f \in K[T] \setminus \{0\}$ vom Grad $\deg f = n$ höchstens n verschiedene Nullstellen haben kann.

   (c) Seien nun $n \in \mathbb{N}_0$ und $f, g \in K[T]$ Polynome mit Grad höchstens n, die in mehr als n Punkten übereinstimmen (d.h. $|\{x \in K \mid f(x) = g(x)\}| > n$). Zeigen Sie, dass $f = g$ gilt.

6. Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge. Wir nennen eine Teilmenge $D \subset X$ *dicht in* X, falls für jede offene Teilmenge $O \subset \mathbb{R}$ mit $O \cap X \neq \varnothing$ auch $O \cap D \neq \varnothing$ gilt. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (i) Die Teilmenge $D \subset X$ ist dicht in X.

   (ii) Jeder Punkt von $X \setminus D$ ist ein Häufungspunkt von D.

   (iii) Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$, die D enthält, enthält auch X.

7. Multiple-Choice-Fragen (ohne Wertung im Bonussystem)

   Bemerkung: Mehrere Antworten können richtig sein!

   (a) Seien $A \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zur Aussage, dass x_0 ein Häufungspunkt von A ist?

      i. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists! a \in A \colon 0 < |a - x_0| < \varepsilon$
      ii. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists a \in A \colon 0 < |a - x_0| < \varepsilon$
      iii. $\exists \varepsilon_0 > 0 \, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \, \exists a \in A \colon 0 < |a - x_0| < \varepsilon$
      iv. $\forall \varepsilon > 1 \, \exists a \in A \colon 0 < |a - x_0| < \varepsilon$

   (b) Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leqslant n$. Wie viele Summanden kommen in der Summe $\sum_{k=m}^{n} a_k$ vor?

      i. $n - m - 1$
      ii. $n - m$
      iii. $n - m + 1$

   (c) Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leqslant n$. Welche der folgenden Ausdrücke stimmen stets mit der Summe $\sum_{k=m}^{n} a_k$ überein?

      i. $\sum_{i=m}^{n} a_{m+n-i}$
      ii. $\sum_{j=1}^{n-m} a_{n+1-j}$
      iii. $\sum_{k=0}^{n-m} a_{m+k}$
      iv. $\sum_{l=0}^{n-m} a_{n-l}$

(d) In der verallgemeinerten Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

für n komplexe Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ gilt Gleichheit genau dann wenn die Summanden $a_1, \ldots, a_n \ldots$

i. ... alle dasselbe Vorzeichen haben.

ii. ... über $\mathbb{R}$ linear abhängig sind.

iii. ... auf einer Geraden $\mathbb{R}z := \{rz \mid r \in \mathbb{R}\}$ mit $z \in \mathbb{C}^\times$ liegen.

iv. ... auf einem Strahl $\mathbb{R}_{\geqslant 0}z := \{rz \mid r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}\}$ mit $z \in \mathbb{C}^\times$ liegen.

(e) Welche der folgenden Zahlen sind algebraisch? (Vgl. Abschnitt 3.2.3 im Skript.)

i. $z_1 = 1 + \sqrt{2}$

ii. $z_2 = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$

iii. $z_3 = \mathrm{i} + \sqrt{1 + \sqrt{2}}$

(f) Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leqslant n$. Welche der folgenden Formeln gelten stets?

i. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

ii. $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$

iii. $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$

iv. $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{n}{j} = 2^{n-1}$

(g) Sei $X = \{(-1)^n + 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Was ist die Menge der Häufungspunkte von X?

i. $\{1\}$

ii. $\{-1\}$

iii. $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

iv. $\{\pm 1\}$

v. X