Serie 6

1. Sei $D \subset \mathbb{R}$ nichtleer. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heisst *Lipschitz-stetig*, wenn es eine *Lipschitz-Konstante* $L \geqslant 0$ gibt mit
$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$$
für alle $x, y \in D$.

   Zeigen Sie, dass Lipschitz-Stetigkeit gleichmässige Stetigkeit impliziert.

2. Berechnen Sie das Integral
$$\int_a^b \operatorname{sgn}(x)\,\mathrm{d}x$$
in Abhängigkeit von a und b. Hierbei bezeichnet sgn die *Signum-* oder *Vorzeichenfunktion*
$$\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

3. Sei $t \in \mathcal{TF}([a, b])$ eine Treppenfunktion. Zeigen Sie, dass t Riemann-integrierbar ist und dass das Riemann-Integral von t mit dem Integral von t als Treppenfunktion übereinstimmt.

4. Sei $f \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom von ungeradem Grad. Zeigen Sie, dass f eine reelle Nullstelle besitzt.

   Hinweis: Zeigen Sie zuerst unter Verwendung ähnlicher Argumente wie im Beweis von Proposition 3.15 im Skript, dass es $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) > 0$.

5. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine monotone Abbildung, so dass für alle $a, b \in I$ und $\xi \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in \mathbb{R}$ zwischen a und b existiert, welches $f(x) = \xi$ erfüllt. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

6. Sei I ein nichtleeres offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Zeigen Sie, dass f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzen kann.

   Hinweis: Betrachten Sie für $x \in I$ die Funktionen
$$f_-(x) = \sup\{f(x') \,|\, x' \in I, x' < x\} \text{ und } f_+(x) = \inf\{f(x') \,|\, x' \in I, x' > x\}.$$
   Bringen Sie diese beiden Funktionen mit der Menge $U(f) = \{x \in I \mid f \text{ ist in } x \text{ nicht stetig}\}$ der Unstetigkeitsstellen von f in Verbindung.

7. Multiple-Choice-Fragen (ohne Wertung im Bonussystem)

   Bemerkung: Mehrere Antworten können richtig sein!

   (a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in 0. Gilt die folgende Aussage im Allgemeinen?

   $$f(0) \neq 0 \implies (\exists \delta > 0\, \forall x \in \mathbb{R}\colon 0 < |x| < \delta \implies f(x) \neq 0)$$

   i. Ja.
   ii. Nein.

   (b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt die folgende Aussage im Allgemeinen?

   $$(\exists \delta > 0\, \forall x \in \mathbb{R}\colon 0 < |x| < \delta \implies f(x) \neq 0) \implies f(0) \neq 0$$

   i. Ja.
   ii. Nein.

   (c) Sei $D \subset \mathbb{R}$, $D' \subset D$ eine nichtleere Teilmenge von D und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

   i. Ist f stetig, so ist die Einschränkung $f|_{D'}$ stetig.
   ii. Ist $f|_{D'}$ stetig, so ist f in allen Punkten $x_0 \in D'$ stetig.
   iii. Ist D' offen in $\mathbb{R}$ und $f|_{D'}$ stetig, so ist f in allen Punkten $x_0 \in D'$ stetig.

   (d) Definiere $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ und

   $$H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

   Welche der folgenden Funktionen sind stetig?

   i. $H \circ H$
   ii. $H \cdot H$
   iii. $F \circ H$
   iv. $H \circ F$
   v. $F \circ F$
   vi. Keine der obigen Funktionen.

   (e) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$ und $f_1\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f_2\colon [b, c] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. In welchen der folgenden Fälle ist die zusammengesetzte Funktion

   $$f\colon [a, c] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f_1(x), & x \in [a, b], \\ f_2(x), & x \in (b, c] \end{cases}$$

   notwendigerweise stetig?

   i. $f(b) = f_1(b)$
   ii. $f(b) = f_2(b)$
   iii. $f_1(b) = f_2(b)$
   iv. In keinem dieser Fälle.