Serie 7

1. Sei $(X, \leqslant)$ eine geordnete Menge[1]. Ein Element $m \in X$ heisst *maximales Element*, falls aus $m \leqslant x$ immer $x = m$ folgt. Ein Element $M \in X$ heisst *Maximum*, falls $M \geqslant x$ für alle $x \in X$ gilt.

   (a) Überzeugen Sie sich davon, dass ein Maximum ein maximales Element ist.

   (b) Überzeugen Sie sich davon, dass X höchstens ein Maximum haben kann.

   Finden Sie Beispiele für folgende Situationen, oder zeigen Sie, dass das nicht möglich ist:

   (c) Die geordnete Menge X besitzt kein Maximum, und auch keine maximalen Elemente.

   (d) Die geordnete Menge X besitzt maximale Elemente, aber kein Maximum.

   (e) Die geordnete Menge X besitzt genau ein maximales Element, aber kein Maximum.

2. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, und $\lambda > 0$ eine reelle Zahl. Sei $g : [\lambda a, \lambda b] \to \mathbb{R}$ die Funktion, welche durch $g(x) = f(\lambda^{-1}x)$ definiert wird. Zeigen Sie, dass g integrierbar ist, und dass

$$\lambda \int_a^b f(x)\,dx = \int_{\lambda a}^{\lambda b} g(x)\,dx$$

   gilt.

3. Sei $f \in \mathcal{R}([a, b])$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass das *partikuläre Integral*

$$F\colon [a, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

   eine stetige Funktion auf $[a, b]$ definiert. Ist F auch gleichmässig, oder sogar Lipschitz-stetig?

4. Zeigen Sie, dass die *modifizierte Dirichlet-Funktion*

$$f\colon [0, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N}_0 \text{ teilerfremd,} \\ 0, & x \text{ irrational} \end{cases}$$

   Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie das Integral.

[1] erfüllt also Axiome (10)-(12) auf Seite 70 im Skript

5. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, injektive Abbildung. Zeigen Sie, dass f streng monoton ist.

6. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $f(x) = \sqrt{x}$. Beweisen Sie im Detail und nur mit den aus der Vorlesung bekannten Methoden, dass
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{3}$$
gilt.

Hinweis: Benutzen Sie eine nicht lineare Zerlegung von $[0,1]$, also nicht $x_k = \frac{k}{n}$, und versuchen Sie eine Verbindung zu Kapitel 1.1 herzustellen.

7. Multiple-Choice-Fragen (ohne Wertung im Bonussystem)

Bemerkung: Mehrere Antworten können richtig sein!

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Was ist der Wert des Integrals
$$\int_0^1 \frac{\lfloor nx^2 \rfloor}{n}\,\mathrm{d}x?$$

i. $n^{-3/2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

ii. $n^{-1}\left(\sqrt{n} - 1\right)$

iii. $n^{-3/2} \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

iv. $n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Positiv- und Negativteil f^+ und f^- von f seien definiert wie in Abschnitt 4.3.2 des Skripts. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

i. Ist f Riemann-integrierbar, so sind f^+, f^- und $|f|$ Riemann-integrierbar.

ii. Ist $|f|$ Riemann-integrierbar, so sind f^+, f^- und f Riemann-integrierbar.

iii. Sind zumindest zwei der Funktionen f, $|f|$, f^+, f^- Riemann-integrierbar, so sind alle dieser Funktionen Riemann-integrierbar.

(c) Sind $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$ und sowohl $f\colon [a,b] \to [c,d]$ als auch $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist auch die Komposition $g \circ f$ Riemann-integrierbar.

i. Wahr.

ii. Falsch.

(d) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in \mathcal{R}([a, b])$ Riemann-integrierbar. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

i. Ändert man den Wert von f in genau einem Punkt, so ist die erhaltene Funktion f^* auch Riemann-integrierbar und es gilt $\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^b f^* \,\mathrm{d}x$.

ii. Ändert man den Wert von f in endlich vielen Punkten, so ist die erhaltene Funktion f^* auch Riemann-integrierbar und es gilt $\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^b f^* \,\mathrm{d}x$.

iii. Ändert man den Wert von f in abzählbar vielen Punkten, so ist die erhaltene Funktion f^* auch Riemann-integrierbar und es gilt $\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^b f^* \,\mathrm{d}x$.

(e) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ Riemann-integrierbare Funktionen mit $\int_a^x f(t) \,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x g(t) \,\mathrm{d}t$ für alle $x \in [a, b]$. Folgt hieraus $f \leqslant g$?

i. Ja.

ii. Ja, falls f und g stetig sind.

iii. Ja, falls f und g stetig sind und $f(a) = g(a)$.

iv. Keine der obigen Antworten ist richtig.