Serie 8

1. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ für die Folgen $(a_n)_n$ gegeben durch

   (a) $a_n = \dfrac{(2 - 1/\sqrt{n})^{10} - (1 + 1/n^2)^{10}}{1 - 1/n^2 - 1/\sqrt{n}}$,

   (b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

   (c) $a_n = \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n} - \dfrac{n}{2}$.

2. Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(b_n)_n$ der *Cesàro-Mittel* gegeben durch

$$b_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

   konvergent ist und denselben Grenzwert wie $(a_n)_n$ besitzt. Folgt aus der Konvergenz der Cesàro-Mittel auch die Konvergenz der ursprünglichen Folge?

3. Sei $f \in C([a, b])$ stetig und $f \geqslant 0$. Beweisen Sie die Äquivalenz

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \iff f = 0.$$

   Belegen Sie anhand eines Beispiels, dass die Implikation „$\Longrightarrow$" nicht notwendigerweise gilt, wenn f lediglich Riemann-integrierbar (und nichtnegativ) ist.

4. Seien $f \in C([a, b])$ stetig und $g \in \mathcal{R}([a, b])$ eine nichtnegative Riemann-integrierbare Funktion.

   (a) Zeigen Sie, dass das Produkt fg Riemann-integrierbar ist.

   (b) Beweisen Sie den *Mittelwertsatz der Integralrechnung*: Es gibt ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

   (c) Bleibt die Aussage in b) gültig, wenn man die Voraussetzung „g nichtnegativ" fallen lässt?

   Hinweis: Nehmen Sie für (a) zuerst an, dass $f \geqslant 0$ ist und verwenden Sie das Sandwich-Kriterium.

5. (Herons Algorithmus zur Berechnung der Wurzel). Sei $a > 0$ eine reelle Zahl. Wir wollen die Wurzel von a möglichst genau bestimmen. Sei dazu $x_0 > 0$ ein beliebiger Startwert und sei $x_n \in \mathbb{R}$ rekursiv definiert durch

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für jede Zahl $x > 0$ liegt die Wurzel $\sqrt{a}$ zwischen x und $\frac{a}{x}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \geqslant \sqrt{a}$.

Hinweis: Beweisen und benutzen Sie die Ungleichung über das arithmetische und geometrische Mittel. Also für alle reellen Zahlen $c, d \geqslant 0$ gilt $\frac{c+d}{2} \geqslant \sqrt{cd}$.

(c) Der Fehler $e_n = |x_n - \sqrt{a}|$ der Approximation erfüllt die Rekursionsformel $e_n = \frac{e_{n-1}^2}{2x_{n-1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Berechnen Sie mit diesem Algorithmus die Wurzel von 2 bis auf fünf Nachkommastellen. Nehmen Sie an, Sie kennen den korrekten Wert von $\sqrt{2}$ nicht. Begründen Sie nur mit Teilaufgabe (c), warum die fünf Nachkommastellen richtig sind.

6. Seien $a < b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen und seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$t \mapsto A(t) = \int_a^b (f(x) + tg(x))^2 \, dx$$

auf $\mathbb{R}$ ein Minimum $m = \min\{A(t) | t \in \mathbb{R}\}$ annimmt und dass $m \geqslant 0$.

(b) Berechnen Sie m und folgern Sie daraus die *Schwarz-Ungleichung*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(x)^2 \, dx}\sqrt{\int_a^b g(x)^2 \, dx}.$$

(c) Zeigen Sie, dass auf dem Vektorraum $V = C([a, b])$ der stetigen reell-wertigen Funktionen auf $[a, b]$ die Abbildung

$$|| \cdot ||_2 : C([a, b]) \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \; f \mapsto \sqrt{\int_a^b f(x)^2 \, dx}$$

eine Norm im Sinne von Definition 5.1 definiert.

7. Multiple-Choice-Fragen (ohne Wertung im Bonussystem)

   Bemerkung: Mehrere Antworten können richtig sein!

   (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $U(f)$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

      i. Ist $U(f)$ endlich, so ist f Riemann-integrierbar.
      ii. Besitzt die Menge $U(f)$ höchstens einen Häufungspunkt, so ist f Riemann-integrierbar.
      iii. Ist $U(f)$ überabzählbar, so ist f nicht Riemann-integrierbar.

   (b) Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 1$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

      i. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$
      ii. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 1$

   (c) Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente reelle Folgen mit Grenzwerten a respektive b. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

      i. Gilt $a_n \leqslant b_n$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a \leqslant b$.
      ii. Gilt $a_n \leqslant b_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a \leqslant b$.
      iii. Gilt $a_n < b_n$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a < b$.
      iv. Gilt $a_n < b_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a < b$.