D-MATH, D-PHYS, D-CHAB | Analysis I | HS21
Prof. Manfred Einsiedler

Serie 9

1. In Serie 8, Aufgabe 5 haben wir für eine reelle Zahl $a > 0$ und $x_0 > 0$ einen beliebigen Startwert die Folge $x_n \in \mathbb{R}$ rekursiv durch
$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)$$
für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

   (a) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_n$ ab $n = 1$ monoton fallend ist, d.h. $x_{n+1} \leqslant x_n$ für alle $n \geqslant 1$. Hinweis: Verwenden Sie Serie 8, Aufgabe 5(b).

   (b) Zeigen Sie, dass die Folge für jeden Startwert $x_0 > 0$ konvergiert und den Grenzwert $\sqrt{a}$ hat.

2. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen oder widerlegen Sie:
$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

3. Beschreiben Sie die Beweisidee für die Konvergenz reeller Cauchy-Folgen in einem Satz. Welcher Beweisschritt funktioniert nicht, wenn wir uns auf den Standpunkt stellen, ausschliesslich die rationalen Zahlen zu kennen?

4. Definiere die Menge $A = \left\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ und sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (i) Die Folge definiert durch $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$ bildet eine Cauchy Folge.

   (ii) Die Funktion f kann zu einer gleichmässig stetigen Funktion $\widetilde{f} : A \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ erweitert werden (also $\widetilde{f}|_A = f$).

   (iii) Die Funktion f ist gleichmässig stetig.

5. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} nz^n = 0$ gilt.

6. (a) Sei $(a_n)_n$ eine beschränkte reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$. Wir setzen $I := \liminf_{n\to\infty} a_n$ und $S := \limsup_{n\to\infty} a_n$. Zeigen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_n$ genau das Intervall $[I, S]$ ist.

   (b) Konstruieren Sie ein Beispiel einer Folge $(a_n)_n$ wie in (a) mit $I = 0$ und $S = 1$.

7. Multiple-Choice-Fragen (ohne Wertung im Bonussystem)

Bemerkung: Mehrere Antworten können richtig sein!

(a) Was ist der Wert von

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}+\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}?$$

i. 0
ii. 1/e
iii. 2/e
iv. Einer dieser Grenzwerte existiert nicht.

(b) Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}^\times$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

i. Aus $\lim_{n\to\infty} a_n \in \{\infty, -\infty\}$ folgt $\lim_{n\to\infty} 1/a_n = 0$.
ii. Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dann divergiert die Folge $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
iii. Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, so folgt $\lim_{n\to\infty} 1/a_n \in \{\infty, -\infty\}$.
iv. Es gilt $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} 1/|a_n| = \infty$.
v. Falls $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, dann hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Grenzwert 0.
vi. Falls $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen unendlich divergiert, dann hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Grenzwert 0.

(c) Es sei $(a_n)_n$ eine beschränkte reelle Folge mit der Eigenschaft, dass alle konvergenten Teilfolgen $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$ denselben Grenzwert besitzen. Dann ist $(a_n)_n$ konvergent.

i. Wahr.
ii. Falsch.

(d) Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei beschränkte reelle Folgen. Welche der folgenden Aussagen über den Limes Superior sind im Allgemeinen korrekt?

i. $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$
ii. $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$
iii. Ist $(b_n)_n$ konvergent, so gilt $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$.
iv. Gibt es ein $N\in\mathbb{N}$ mit $a_n \geqslant 0$ für $n \geqslant N$ und gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = 0$, so folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
v. Gibt es eine Folge $(n_k)_k$ von Indizes mit $a_{n_k} \leqslant b_{n_k}$ für alle $k\in\mathbb{N}$, so folgt $\limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} b_n$.