Serie 1

Aufgabe 1

Wir betrachten die Menge $X = \mathbb{R}$. Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ definieren wir eine Funktion

$$\begin{aligned} d_\alpha \colon X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto |x - y|^\alpha, \end{aligned}$$

wobei wir die Konvention verwenden, dass $0^0 = 1$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist (X, d_α) ein metrischer Raum?

Tipp: Zeige $d_\alpha(x, y)^{1/\alpha} \leq d_\alpha(x, y)(d_\alpha(x, y) + d_\alpha(y, z))^{1/\alpha\ -1}$.

Aufgabe 2

Betrachte die Menge $P := \{A, B, C, X\}$. Gegeben sind die Werte

$$d(A, B) = d(B, C) = d(A, C) = 2, \qquad d(A, X) = d(B, X) = d(C, X) = 1.$$

(a) Erweitere d zu einer Abbildung $d : P \times P \to \mathbb{R}$, sodass (P, d) ein metrischer Raum ist.

(b) Wie viele Isometrien gibt es zwischen (P, d) und sich selbst?

(c) Es sei d_{Euklid} die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^3$. Gibt es eine vierelementige Menge $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ und eine Isometrie zwischen (P, d) und $(Q, d_{\text{Euklid}}|_{Q \times Q})$?

Aufgabe 3

Wir betrachten $X = \mathbb{R}^n$ mit der Funktion

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeige, dass d_∞ eine Metrik ist.

(b) Für $n = 1, 2$ und 3, skizziere die Einheitssphäre

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n \colon d_\infty(x, 0) = 1\}$$

bezüglich der Metrik d_∞.

(c) Finde eine Isometrie von $(\mathbb{R}^2, d_{\text{Euklid}})$, die aber keine Isometrie von $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ ist.

(d) Bestimme (ohne Beweis) die Isometrien von $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$?

Aufgabe 4 ($\star$)

Wir können zwei Metriken auf dem Sierpinski-Dreieck G definieren: Die Teilraum-Metrik $d_T := d_{\text{Euklid}}|_{G \times G}$ und die Pfadmetrik

$$d_P(x, y) := \inf\{L(\gamma) \colon \gamma \text{ ist ein Pfad in } G \text{ von } x \text{ nach } y\},$$

wobei $L(\gamma)$ die Länge des Pfades ist. Wir nehmen an, dass die Seitenlänge des Sierpinski-Dreiecks 1 ist.

Wenn man einen Punkt p zufällig im Sierpinski-Dreieck auswählt, wie weit ist der Punkt durchschnittlich von einem Eckpunkt entfernt?

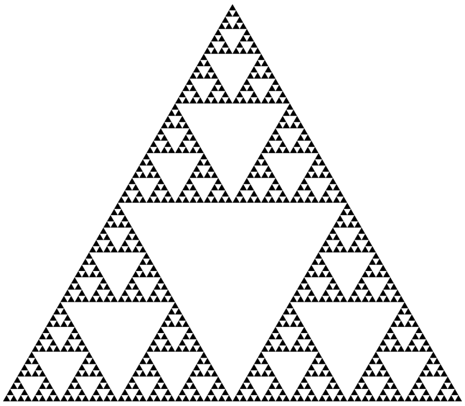

Abbildung 1: Abgebildet ist der siebte Iterationsschritt der Konstruktion des Sierpinski-Dreiecks. Das Sierpinksi-Dreieck G entsteht als Grenzwert.