Serie 2

Bemerkung: In dieser Serie meinen wir immer die Sphäre S^2 mit Radius 1.

Aufgabe 1

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass der Flächeninhalt A eines sphärischen Dreiecks mit Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ durch

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

gegeben ist.

(1) Finde eine analoge Formel für ein sphärisches Viereck mit den Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

(2) Finde eine analoge Formel für die Fläche eines sphärischen n-Ecks mit Winkeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ für $n \in \{3, 4, \ldots\}$. Wir dürfen dabei ohne Beweis annehmen, dass jedes n-Eck in Dreiecke unterteilt werden kann.

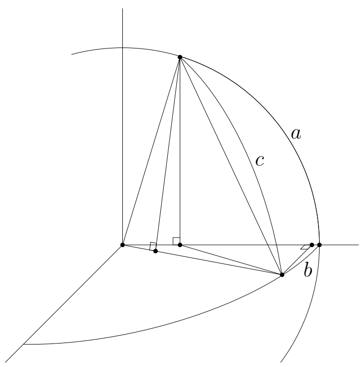
.

Aufgabe 2

Wir betrachten eine sphärische Version des Satzes von Pythagoras: Für ein rechtwinkliges Dreieck mit Seitenlängen a, b, c (wobei der rechte Winkel gegenüber c liegt), gilt immer:

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b).$$

(1) Beweise den sphärischen Satz von Pythagoras mit Hilfe der folgenden Abbildung:



(2) Verwende die Taylor-Entwicklung

$$\cos(a) = 1 - \frac{1}{2}a^2 + \mathcal{O}(a^4)$$

um den Euklidischen Satz vom Pythagoras für kleine Längen a, b, c anzunähern.

Aufgabe 3

Angenommen wir haben ein Seil der Länge $\ell > 0$, das eine Scheibe berandet, und möchten, dass die Fläche auf beiden Seiten des Seiles möglichst gross ist. Bekommen wir eine grössere Fläche in $\mathbb{R}^2$ oder S^2? Hängt die Antwort von ℓ ab?

Tipp: Zeigen Sie, dass $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.