Serie 3

Bemerkung: In dieser Serie meinen wir immer die Sphäre S^2 mit Radius 1.

Aufgabe 1

Wir betrachten die stereographische Projektion

$$\begin{aligned} f\colon S^2 \setminus \{N\} &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right), \end{aligned}$$

wobei $N = (0,0,1)$.

(1) Zeige, dass L genau dann eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ ist, wenn $f^{-1}(L) \cup \{N\}$ ein Kreis in S^2 ist, der durch den Nordpol geht.

(2) Was ergibt die stereographische Projektion auf Grosskreise[1] angewandt?

(3) Zeige, dass C genau dann ein Kreis in $\mathbb{R}^2$ ist, wenn $f^{-1}(C)$ ein Kreis in S^2 ist, der nicht den Nordpol N enthält.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Ebene mit dem sphärischen Längenelement ds_S. Sei $r \in [0,1]$ fix. Für einen Pfad $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ist die Länge durch

$$L(\gamma) := \int_\gamma ds_S := \int_a^b \frac{2}{1+|\gamma(t)|^2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

definiert.

(1) Berechne die Länge der Kurve $\gamma_1\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto r\cos(t) + i\,r\sin(t)$

(2) Berechne die Länge der Kurve $\gamma_2\colon [0,r] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$. Für diese Aufgabe darf

$$\int_0^r \frac{2}{1+t^2}dt = \arcsin\left(\frac{2r}{1+r^2}\right)$$

für $r \in [0,1]$ ohne Beweis verwendet werden.

(3) Zeige, dass die Resultate in (1) und (2), mit der bekannten Formel

$$C(R) = 2\pi\sin(R)$$

für den Umfang $C(R)$ eines sphärischen Kreises mit Radius R übereinstimmt.

[1] Ein Kreis auf der Sphäre ist ein Grosskreis, wenn der Mittelpunkt des Kreises gleich dem Mittelpunkt der Sphäre ist.