Serie 5

In dieser Serie erarbeiten wir ein weiteres Modell der hyperbolischen Ebene.

Aufgabe 1

Wir betrachten die obere Halbebene $\mathbb{R}^2_+ := \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}(z) > 0\}$ und die Transformation

$$\begin{aligned} f\colon \hat{\mathbb{C}} &\to \hat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto i\frac{z-i}{z+i}. \end{aligned}$$

(Somit ist f i mal die sogenannte *Cayley-Transformation* $z \mapsto (z-i)/(z+i)$.)

(1) Berechne f von $-1, 0, 1, \infty$ und i.

(2) Finde eine explizite Formel für die Umkehrfunktion f^{-1} und zeige somit, dass f bijektiv ist.

(3) Zeige, dass f die obere Halbebene $\mathbb{R}^2_+$ auf die Einheitsscheibe $B_1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ abbildet.

Aufgabe 2

Wir definieren eine Metrik $d_{\mathbb{H}_+}$ auf $\mathbb{R}^2_+$ in dem wir das Längenelement

$$ds_{\mathbb{H}_+} := h_{\mathbb{H}_+}(z)\, ds_{\mathbb{E}} := \frac{1}{y}\, ds_{\mathbb{E}}, \qquad z = x + iy \in \mathbb{R}^2_+,$$

angeben. Es stellt sich heraus, dass f aus Aufgabe 1 eine Isometrie vom metrischen Raum $\mathbb{H}_+ := (\mathbb{R}^2_+, d_{\mathbb{H}_+})$ zur hyperbolischen Ebene $\mathbb{H} = (B_1, d_{\mathbb{H}})$ ist. Somit sind sowohl $\mathbb{H}_+$, als auch $\mathbb{H}$ Modelle der hyperbolischen Ebene.

Wir betrachten den Pfad $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{H}_+,\ t \mapsto ti$, wobei $0 < a < b$.

(1) Berechne die Länge

$$L_{\mathbb{H}_+}(\gamma) = \int_\gamma ds_{\mathbb{H}_+}$$

des Pfades γ.

(2) Zeige, dass der Pfad γ eine minimierende Geodäte in $\mathbb{H}_+$ ist.

(3) Zeige, dass für $0 < a < b$ gilt

$$d_{\mathbb{H}_+}(ia, ib) = d_{\mathbb{H}}(f(ia), f(ib)).$$

Also ist f mindestens auf γ eine Isometrie.

Aufgabe 3

(1) Zeige, dass die Geodäten in $\mathbb{H}_+$ genau die Halbgeraden und Halbkreise sind, die senkrecht zur x-Achse stehen.

(2) Welcher Geodäte in $\mathbb{H}_+$ entspricht der x-Achsenabschnitt in $\mathbb{H}$?

(3) Für $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ zeichne die Geodäten $\alpha_k = \{k + ia \in \mathbb{C}\colon a > 0\}$ in $\mathbb{H}_+$ und die entsprechenden Geodäten $f(\alpha_k)$ in $\mathbb{H}$.