Beispiel-Aufgaben

Aufgabe 1

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen *ohne Begründung* an, ob sie wahr oder falsch ist:

1. Wenn (X, d) ein metrischer Raum ist, dann ist auch $(X, \sqrt{d})$ ein metrischer Raum.
2. Wir betrachten die Translation $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z + i$ und die Rotation $R\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto iz$ um den Nullpunkt. Dann ist $T \circ R \circ T^{-1}$ eine Rotation um den Punkt i.
3. Jede winkeltreue Funktion ist orientierungserhaltend.
4. Sei γ ein Pfad, der lokal längenminimierend ist. Wenn γ aus zwei längenminimierenden Pfaden zusammengesetzt ist, dann ist γ auch längenminimierend.
5. Seien $a, b, c, d \in \hat{\mathbb{C}}$ vier unterschiedliche Punkte. Wenn $[a, b; c, d] = \lambda$, dann $[a, b; d, c] = \frac{1}{\lambda}$.

Aufgabe 2

Wir betrachten den Kreis

$$k = \left\{ x + iy \in \mathbb{H}^2\colon \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right\}.$$

Finden Sie den hyperbolischen Radius und den hyperbolischen Mittelpunkt dieses Kreises.

Aufgabe 3

Wir betrachten die Menge $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x > 0, y > 0\}$ mit der infinitesimalen Kurvenlänge

$$ds_X := (x + y) ds_{\mathbb{E}^2}$$

sowie die folgenden Pfade.

$$\begin{aligned} \gamma_1\colon [0,1] &\to X \\ t &\mapsto (t+1, t+1) \\ \gamma_2\colon [0,2] &\to X \\ t &\mapsto \begin{cases} (1, 1+t), & \text{für } t \in [0,1] \\ (t, 2), & \text{für } t \in (1,2]. \end{cases} \end{aligned}$$

(1) Skizzieren Sie die beiden Pfade.

(2) Berechnen Sie die Längen der zwei Pfade.

($\star$) (3) Beweisen Sie, dass γ_1 längenminimierend ist.

Aufgabe 4

Skizzieren Sie die hyperbolische Ebene mit drei Geodäten, die sich alle gegenseitig schneiden. Zeichne eine weitere Geodäte, die ultraparallel ist zu den drei vorherigen.

Aufgabe 5

Wir erinnern uns, dass jede orientierungserhaltende Möbiustransformation f geschrieben werden kann als

$$f = T_a \circ M_b \circ I \circ T_c \quad \text{oder} \quad f = T_a \circ M_b,$$

wobei für $a, b \in \mathbb{C}$ gilt $T_a(z) = z + a, M_b(z) = bz, I(z) = 1/z$. Schreiben Sie die folgenden Möbiustransformationen in der obigen Form.

a)
$$f(z) = \frac{z}{2z+1}$$

b)
$$f(z) = \frac{z+3}{3z+1}$$

Aufgabe 6

Seien $p, q \in \mathbb{H}^2$ zwei verschiedene Punkte in der hyperbolischen Ebene. Zeigen Sie, dass es exakt einen V-Kreis E gibt, der durch p und q geht, so dass $E \cap \mathbb{H}^2$ eine Geodäte ist.

Aufgabe 7

Sei $a, b \in (-1, 1)$ mit $a < b$.

(1) Berechnen Sie das Doppelverhältnis der vier Punkte $-1, a, b, 1 \in \overline{\mathbb{H}^2}$.

(2) Drücken Sie den Abstand $d_{\mathbb{H}^2}(a, b)$ mit Hilfe des Doppelverhältnis aus. *Bemerkung: Wir erinnern uns, dass gilt*

$$d_{\mathbb{H}^2}(a, b) = \log\left(\frac{(1-a)(1+b)}{(1+a)(1-b)}\right).$$

Aufgabe 8

Zeige, dass es für beliebige zwei hyperbolische Geodäten g, h eine Möbiustransformation T gibt, die g nach h abbildet. Wie viele solche Möbiustransformationen gibt es?

Aufgabe 9

Finde eine orientierungserhaltende Möbiustransformation $T\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ mit

$$T(0) = i, \quad T(1) = 1, \quad T(\infty) = 2 + i.$$

Aufgabe 10

Skizzieren Sie zwei hyperbolische Kreise in $\mathbb{H}^2$, die sich nicht schneiden. Skizzieren Sie auch deren hyperbolische Mittelpunkte. Sind die hyperbolischen Mittelpunkte die gleichen wie die Euklidischen Mittelpunkte?

Aufgabe 11

Für Euklidische Dreiecke mit Winkeln α, β, γ gilt die Formel $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Hyperbolische Dreiecke haben hingegen immer eine Winkelsumme weniger als π. Die Differenz $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ wird *Winkelmangel* genannt.

(1) Definieren und berechnen Sie den Winkelmangel für ein hyperbolisches Fünfeck mit fünf rechten Winkeln.

(2) Für hyperbolische Dreiecke ist der Flächeninhalt gerade gleich dem Winkelmangel. Wie gross ist die Fläche eines hyperbolischen Fünfecks mit fünf rechten Winkeln?

(3) Zeige, dass es kein hyperbolisches Fünfeck gibt, dessen Winkel alle grösser als $108°$ sind.

Aufgabe 12

In Abbildung 1 ist eine Kachelung der hyperbolischen Ebene in lauter gleich grosse gleichseitige Dreiecke mit gleichen Winkeln dargestellt. Was ist der Flächeninhalt eines der Dreiecke?

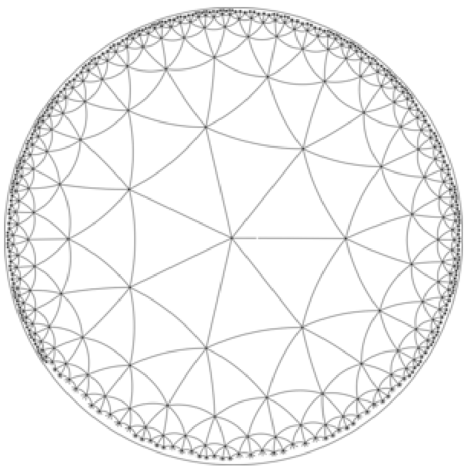

Abbildung 1: Eine regelmässige Kachelung der hyperbolischen Ebene in gleich grosse gleichseitige Dreiecke.

($\star$) Additional fun exercises

Aufgabe 1

Für $\mathbb{S}^2, \mathbb{E}^2$ und $\mathbb{H}^2$ bestimme alle $n \geq 3$ für die es ein gleichseitiges n-Eck gibt, dessen Winkel alle $120°$ sind.

Aufgabe 2

Welche der folgenden Bilder von M.C. Escher basieren auf der hyperbolischen Geometrie.

Abbildung 2: Diverse Bilder von M.C. Escher, Quelle: `https://mathstat.slu.edu/escher/index.php/Hyperbolic_Geometry_Exercises`.

Aufgabe 3

Sei C der Kreis mit Mittelpunkt $1+i \in \mathbb{C}$ und Radius 1. Sei α die hyperbolische Geodäte $C \cap \mathbb{H}^2$. Sei p der Punkt auf α am nächsten zu 0. Sei q ein weiterer Punkt auf α. Sei

$$s = d_{\mathbb{H}^2}(p, q), \; t = d_{\mathbb{H}^2}(0, q).$$

Dann ist t eine Funktion von s, $t = f(s)$. Wenn q zum Rand der hyperbolischen Ebene geht, ist das asymptotische Wachstum von t in Abhängigkeit von s

(a) linear

(b) quadratisch

(c) exponentiell

Tipp: Dreiecksungleichung.

Aufgabe 5

(a) Zeige, dass ultraparallelle Geodäten sich unendlich weit voneinander entfernen.

(b) Zeige, dass parallele Geodäten, die sich im unendlichen treffen, exponentiell schnell aufeinander zukommen.

Aufgabe 6

Ein Sportler in der hyperbolischen Ebene hat ein doppelläufiges Gewehr. Die beiden Läufe sind 0.01 Einheiten voneinander entfernt und beide sind orthogonal zu einem Balken (geodätisches Segment), dass die beiden verbindet. Wir nehmen an, dass die Kugeln sich entlang Geodäten bewegen und keine Geschwindigkeit verlieren.

Betrachte den Abstand $a(d)$ in Abhängigkeit der hyperbolischen Distanz d zum Gewehr Finde den Abstand der zwei Kugelflugbahnen in Abhängigkeit der Distanz zum Gewehr. Wenn $d \to \infty$,

- geht $a(d)$ gegen 0?
- geht $a(d)$ gegen eine Konstante?
- steigt $a(d)$ linear?
- steigt $a(d)$ exponentiell?

Aufgabe 8

(a) Ist es sehr einfach oder sehr schwer in der hyperbolischen Ebene zu zielen? Warum?

(b) Welche Ziele sind in der Sphäre am einfachsten zu treffen?