Serie 1

Aufgabe 1

Wir betrachten die Menge $X = \mathbb{R}$. Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ definieren wir eine Funktion

$$\begin{aligned} d_\alpha \colon X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto |x - y|^\alpha, \end{aligned}$$

wobei wir die Konvention verwenden, dass $0^0 = 1$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist (X, d_α) ein metrischer Raum?

Tipp: Zeige $d_\alpha(x,y)^{1/\alpha} \leq d_\alpha(x,y)(d_\alpha(x,y) + d_\alpha(y,z))^{1/\alpha\ -1}$.

Lösung:

Für $\alpha > 1$ betrachten wir die Punkte $x = 0, y = 1, z = 2 \in X = \mathbb{R}$. Wir haben $d_\alpha(x,y) = d_\alpha(y,z) = 1^\alpha = 1$ und $d_\alpha(x,z) = 2^\alpha > 2$, also ist die Dreiecksungleichung

$$d_\alpha(x,z) \leq d_\alpha(x,y) + d_\alpha(y,z)$$

nicht erfüllt und (X, d_α) ist kein metrischer Raum.

Für $0 < \alpha \leq 1$ überprüfen wir die Axiome. Dafür seien $x, y, z \in X = \mathbb{R}$ beliebig.

Die Funktion d_α ist positiv-definit: Zuerst bemerken wir, dass $|x-y| \geq 0$, also auch $d_\alpha(x,y) = |x-y|^\alpha \geq 0$. Ausserdem gilt $d_\alpha(x,y) = |x-y|^\alpha \geq 0$, genau dann wenn $|x-y| = 0$ also genau dann wenn $x = y$.

Die Funktion d_α ist symmetrisch: $d_\alpha(x,y) = |x-y|^\alpha = |y-x|^\alpha = d_\alpha(y,x)$.

Die Dreiecksungleichung gilt: Wir folgern aus der Dreiecksungleichung des Betrags unter Verwendung des Tipps, dass gilt

$$\begin{aligned} d_\alpha(x,z)^{1/\alpha} &= |x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z| \\ &= d_\alpha(x,y)^{1/\alpha} + d_\alpha(y,z)^{1/\alpha} \\ &= d_\alpha(x,y) d_\alpha(x,y)^{1/\alpha - 1} + d_\alpha(y,z) d_\alpha(y,z)^{1/\alpha-1} \\ &\leq d_\alpha(x,y)\left(d_\alpha(x,y) + d_\alpha(y+z)\right)^{1/\alpha-1} + d_\alpha(y,z)\left(d_\alpha(x,y) + d_\alpha(y+z)\right)^{1/\alpha-1} \\ &= \left(d_\alpha(x,y) + d_\alpha(y+z)\right)\left(d_\alpha(x,y) + d_\alpha(y+z)\right)^{1/\alpha-1} \\ &= \left(d_\alpha(x,y) + d_\alpha(y,z)\right)^{1/\alpha}. \end{aligned}$$

Somit gilt auch die Dreiecksungleichung $d_\alpha(x,z) \leq d_\alpha(x,y) + d_\alpha(y,z)$. Somit ist (X, d_α) ein metrischer Raum für $0 < \alpha \leq 1$.

Für $\alpha = 0$ gilt $d(x,y) = 1$ für alle $x, y \in X$. Das ist für die Dreiecksungleichung kein Problem, widerspricht aber der positiv-Definitheit, die besagt, dass $d(x,x) = 0$. Somit ist (X, d_0) kein metrischer Raum.

Aufgabe 2

Betrachte die Menge $P := \{A, B, C, X\}$. Gegeben sind die Werte

$$d(A,B) = d(B,C) = d(A,C) = 2, \qquad d(A,X) = d(B,X) = d(C,X) = 1.$$

(a) Erweitere d zu einer Abbildung $d : P \times P \to \mathbb{R}$, sodass (P, d) ein metrischer Raum ist.

(b) Wie viele Isometrien gibt es zwischen (P, d) und sich selbst?

(c) Es sei d_{Euklid} die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^3$. Gibt es eine vierelementige Menge $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ und eine Isometrie zwischen (P, d) und $(Q, d_{\text{Euklid}}|_{Q\times Q})$?

Lösung:

(a) Zusätzlich zu den gegeben Werten definieren wir $d(Z,Z) := 0$ für alle $Z \in \{A,B,C,X\}$. Außerdem setzen wir $d(Z,Z') = d(Z',Z)$ für all solche $Z, Z' \in \{A,B,C,X\}$, für die $d(Z',Z)$ zu den gegeben Werten gehört. Damit haben wir nun eine Abbildung $d : P \times P \to \mathbb{R}$ definiert.

Diese Abbildung erfüllt per Definition die Bedingungen (i) und (ii). Auch Bedingung (iii) wird erfüllt: Es seien $Z, Z', Z'' \in P$. Wir unterscheiden zwei Fälle: Falls $Z = Z''$ gilt, dann $0 = d(Z,Z'') \leq d(Z,Z') + d(Z',Z'')$, da $d(Z,Z'), d(Z',Z'') \geq 0$ aufgrund der Tatsache, dass der Wertebereich von d durch $[0,\infty)$ gegeben ist. Betrachte nun den Fall $Z \neq Z''$: Wir unterscheiden wiederum zwei Fälle: Falls $X \in \{Z, Z''\}$, so gilt $1 = d(Z,Z'')$ und mindestens eines der Paare $\{Z,Z'\}, \{Z',Z''\}$ besteht aus verschiedenen Elementen, welche gemäß Definition Abstand mindestens 1 haben, also $d(Z,Z'') = 1 \leq d(Z,Z') + d(Z',Z'')$. Falls $X \notin \{Z,Z''\}$ so gilt $2 = d(Z,Z'')$. Falls nun $Z' = X$, dann $2 = d(Z,Z'') = d(Z,Z') + d(Z',Z'')$. Andernfalls, $2 = d(Z,Z'') \leq 4 = d(Z,Z') + d(Z',Z'')$.

(b) Per Definition, erfüllt eine Isometrie φ von (P,d) auf sich selbst für alle $Z, Z' \in P$ die Gleichung $d(\varphi(Z), \varphi(Z')) = d(Z,Z')$. Insbesondere muss für alle $Z, Z' \in \{A,B,C\}$ die Gleichung $d(\varphi(Z), \varphi(Z')) = d(Z,Z') = 1$ gelten und daher $\varphi(Z), \varphi(Z') \in \{A,B,C\}$. Mit anderen Worten, eine Isometrie von (P,d) auf sich selbst permutiert die Menge $\{A,B,C\} \subseteq P$ und fixiert X. Es existieren genau 6 Permutationen der Menge $\{A,B,C\}$ und jede solche Permutation $\sigma : \{A,B,C\} \to \{A,B,C\}$ definiert eine Isometrie φ_σ von (P,d) auf sich selbst durch

$$\varphi_\sigma : P \to P,\ Z \mapsto \begin{cases} \sigma(Z) & Z \in \{A,B,C\} \\ Z & Z \notin \{A,B,C\} \end{cases}.$$

(c) Falls eine vierelementige Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Isometrie φ zwischen (P,d) und $(Q, d_{\text{Euklid}}|_{Q\times Q})$ existieren, so bilden die Punkte

$$\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C) \in Q \subseteq \mathbb{R}^2$$

ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 2. Da für alle $Z \in \{A, B, C\}$ ebenfalls $d(\varphi(Z), \varphi(X)) = d(Z, X) = 1$ gilt, liegt der Punkt $\varphi(X) \in Q$ auf der Sphäre mit Radius 1 um jeden der Punkte $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)$. Da diese drei Sphären keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben, muss die Annahme falsch sein. Es gibt also keine solche Teilmenge Q und Isometrie φ.

Aufgabe 3

Wir betrachten $X = \mathbb{R}^n$ mit der Funktion

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeige, dass d_∞ eine Metrik ist.

(b) Für $n = 1, 2$ und 3, skizziere den Einheitssphäre

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n : d_\infty(x, 0) = 1\}$$

bezüglich der Metrik d_∞.

(c) Finde eine Isometrie von $(\mathbb{R}^2, d_{\text{Euklid}})$, die aber keine Isometrie von $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ ist.

(d) Bestimme (ohne Beweis) die Isometrien von $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$?

Lösung:

(a) Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ beliebige Punkte.

Wir sehen direkt, dass $d_\infty(x, y) \geq 0$ gilt. Ausserdem ist $d_\infty(x, y) = 0$ genau dann wenn für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $|x_i - y_i| = 0$, also $x_i = y_i$, also $x = y$. Somit ist $d_\infty(x, y)$ positiv-definit.

Auch die Symmetrie folgt direkt.

Für die Dreiecksungleichung sehen wir

$$\begin{aligned} d_\infty(x, z) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - z_i| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - z_i| = d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z) \end{aligned}$$

Somit ist $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ ein metrischer Raum.

(b) Für $n = 1$ sind es genau die beiden Punkte $-1, 1 \in \mathbb{R}^1$. Für $n = 2$ ist die Einheitssphäre gleich dem Rand eines Quadrates mit Seitenlänge 2, wessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen liegen (und der Mittelpunkt des Quadrates liegt auf 0). Für $n = 3$ bekommen wir den Rand eines Würfels mit Seitenlänge 2, Mittelpunkt 0 und Seitenflächen Parallel zu den Koordinaten-Ebenen xy, yz und zx.

(c) Die Rotation um den Winkel $\varphi = \pi/4$ ist eine Isometrie in der Euklidischen Metrik. Wir bemerken, dass für jede Isometrie $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die den Nullpunkt 0 fixiert, gilt, dass jeder Punkt aus der Einheitssphäre wieder in die Einheitssphäre abgebildet wird: Sei $x \in S$, also gilt $d_\infty(x, 0) = 1$ und somit

$$d_\infty(f(x), 0) = d_\infty(f(x), f(0)) \overset{f \text{ Isom.}}{=} d_\infty(x, 0) = 1,$$

also $f(x) \in S$. Die Rotation um den Winkel φ sendet die Einheitssphäre (das Quadrat) nicht auf sich selber, also kann sie keine Isometrie von $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ sein.

(d) Wir bemerken, dass beliebige Translationen (Funktionen der Form $T_v\colon x \mapsto x + v$) die Distanz d_∞ erhalten.

Weiter gibt es 8 Isometrien (4 Spiegelungen, 3 Rotationen und die Identität), die die Einheitssphäre (das Quadrat) auf sich selber abbilden. Dabei handelt es sich um Isometrien von $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$, die den Nullpunkt fixieren.

Wir bekommen noch weitere Isometrien durch Hintereinanderschalten von Translationen und Isometrien mit Fixpunkten.

Alle Isometrien von $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ sind von dieser Art, der Beweis dieser Aussage ist aber nicht einfach.

Wir geben eine Idee wie man beweisen kann, dass es nur 8 Isometrien gibt, die den Nullpunkt fixieren (wir schreiben d statt d_∞): Für zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^2$ und $t \in [0, d(x, y)]$ betrachten wir die Mengen

$$R_t(x, y) = \{z \in \mathbb{R}^2 \colon d(x, z) = t \text{ und } d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\}$$

und

$$R(x, y) = \bigcup_{t \in [0, d(x,y)]} R_t(x, y).$$

Wir bemerken, dass $R(x, y)$ ein Rechteck ist, dessen Kanten Steigung $+1$ oder -1 haben. Zwei der Eckpunkte des Rechtecks sind durch x und y gegeben.

Wir nennen das Rechteck *ausgeartet*, wenn es nur eine Linie ist, also wenn man x und y mit einer geraden Linie der Steigung $+1$ oder -1 verbinden kann. In diesem Fall besteht $R_t(x, y)$ für jedes t aus einem einzigen Punkt.

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie. Wir bemerken, dass

$$\begin{aligned} f(R(x, y)) &= \{f(z) \in \mathbb{R}^2 \colon d(x, z) = t \text{ und } d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\} \\ &= \{f(z) \in \mathbb{R}^2 \colon d(f(x), f(z)) = t \text{ und } d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(y)) = d(f(x), f(y))\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^2 \colon d(f(x), z) = t \text{ und } d(f(x), z) + d(z, f(y)) = d(f(x), f(y))\} \\ &= R_t(f(x), f(y)) \end{aligned}$$

Falls das Rechteck $R(x, y)$ ausgeartet ist, dann besteht für jedes t $R_t(x, y)$ aus einem einzigen Punkt. Also besteht auch $R_t(f(x), f(y)) =$

$f(R_t(x,y))$ aus einem einzigen Punkt. Also ist das Rechteck $R(f(x), f(y))$ ebenfalls ausgeartet. Isometrien müssen also ausgeartete Rechtecke auf ausgeartete Rechtecke senden.

Wir betrachten nun eine Isometrie f mit $f(0) = 0$. Auf dem Einheitskreis (Quadrat der Seitenlänge 2) gibt es genau 4 Punkte y, so dass das $R(0, y)$ ausgeartet ist und f muss diese Punkte permutieren.

Wenn wir festgelegt haben, was mit diesen 4 Punkten passiert, dann lässt sich auch schliessen was mit Punkten auf den Geraden $y_2 = y_1$ und $y_2 = -y_1$ passiert. Wenn man es für diese Punkte weiss, dann kann man es auch für die vier Quadranten dazwischen folgern. Es gibt höchstens so viele nullpunkterhaltende Isometrien, wie Permutationen der vier Punkte im Quadrat. Allerdings werden nicht alle Permutationen des Quadrates von einer Isometrie realisiert: Da gegenüberliegende Punkte ausgeartete Rechtecke besitzen, müssen sie auch nach einer Isometrie wieder ausgeartete Rechtecke besitzen, also gegenüber liegen. Wir folgern, dass es höchstens 8 nullpunkterhaltende Isometrien geben kann und durch explizite Angabe von 4 Spiegelungen, 3 Rotationen und 1 Identität beenden wir den Beweis.

Aufgabe 4 ($\star$)

Wir können zwei Metriken auf dem Sierpinski-Dreieck G definieren: Die Teilraum-Metrik $d_T := d_{\text{Euklid}}|_{G\times G}$ und die Pfadmetrik

$$d_P(x,y) := \inf\{L(\gamma)\colon \gamma \text{ ist ein Pfad in } G \text{ von } x \text{ nach } y\},$$

wobei $L(\gamma)$ die Länge des Pfades ist. Wir nehmen an, dass die Seitenlänge des Sierpinski-Dreiecks 1 ist.

Wenn man einen Punkt p zufällig im Sierpinski-Dreieck auswählt, wie weit ist der Punkt durchschnittlich von einem Eckpunkt entfernt?

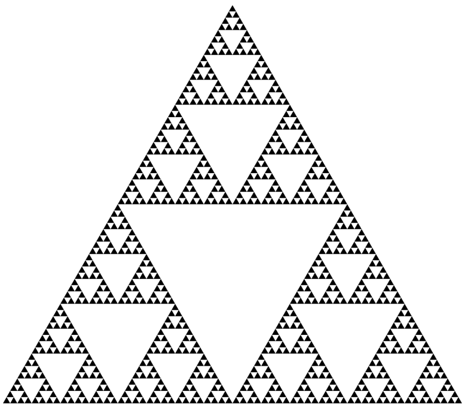

Abbildung 1: Abgebildet ist der siebte Iterationsschritt der Konstruktion des Sierpinski-Dreiecks. Das Sierpinksi-Dreieck G entsteht als Grenzwert.

Lösung:
Wir unterteilen das Sierpinski-Dreieck G in 3 gleiche Teile A, B und C, wobei A oben, B links und C rechts liegt. A, B und C sind jeweils Sierpinski-Dreiecke mit Seitenlänge $1/2$. Wir bemerken, dass alle Punkte in einem Teildreieck den kürzesten Abstand zu genau einem der drei Eckpunkte haben, nämlich dem Eckpunkt, der im Teildreieck enthalten ist.

Wir betrachten nun das obere Teildreieck A mit dem obersten Eckpunkt. Wir unterteilen das obere Teildreieck in drei kleinere Dreiecke A_1, B_1 und C_1, wobei A_1 oben, B_1 links und C_1 rechts liegt. Wenn wir einen kürzesten Pfad zu einem Punkt in B_1 zeichnen möchten, dann sollten wir damit anfangen entlang dem Rand links nach unten zu gehen (Distanz $1/4$). Wenn wir einen Punkt in C_1 ansteuern wollen, dann sollten wir damit beginnen an der rechten Seite entlang nach unten zu gehen. Wenn wir einen Punkt in A_1 ansteuern wollen sollten wir zuoberst bleiben. Da ein zufälliger Punkt in A mit gleicher Wahrscheindlichkeit $p = 1/3$ in A_1, B_1 oder C_1 liegt, erwarten wir im ersten Schritt im Durchschnitt eine Pfadlänge von

$$\frac{s_0/2 + s_0/2 + 0}{3} = s_0\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$$

wobei $s_0 = 1/2$ die Seitenlänge von A ist.

In allen drei Fällen sind können wir das Teildreieck mit Index 1 als neues Dreieck A nehmen mit Seitenlänge $s_1 = s_0/2 = 1/4$. Wir unterteilen wieder in A_2, B_2 und C_2 und legen im Durchschnitt einen Weg der Länge

$$\frac{s_1/2 + s_1/2 + 0}{3} = s_1 \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{3}$$

zurück. Im Dreieck A_n legen wir durchschnittlich den Weg

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{3}$$

zurück, was uns auf den durchschnittlichen totalen Weg von

$$\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} - 1 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right) = \frac{1}{3}$$

in A. Die Situation ist symmetrisch. In jedem der drei Teildreiecke A, B und C ist die durchschnittliche Länge eines Pfades gerade $1/3$. Somit ist der durchschnittliche Abstand eines Punktes zu einem Eckpunkt $1/3$.