Serie 2

Bemerkung: In dieser Serie meinen wir immer die Sphäre S^2 mit Radius 1.

Aufgabe 1

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass der Flächeninhalt A eines sphärischen Dreiecks mit Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ durch

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

gegeben ist.

(1) Finde eine analoge Formel für ein sphärisches Viereck mit den Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

(2) Finde eine analoge Formel für die Fläche eines sphärischen n-Ecks mit Winkeln $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ für $n \in \{3, 4, \dots\}$. Wir dürfen dabei ohne Beweis annehmen, dass jedes n-Eck in Dreiecke unterteilt werden kann.

.

Lösung:
Wir lösen (2) und sommit ist (1) auch gelöst:

Sei P das n-Eck mit Winkeln $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ an den Eckpunkten $v_1, \dots, v_n$. Wir unterteilen P in Dreiecke. Wir bemerken, dass es genau $n-2$ Dreiecke hat, da für jede neue Ecke auch ein neues Dreieck hinzugefügt werden muss. Sei $\mathcal{D}$ die Menge dieser Dreiecke. Jedes Dreieck $\Delta \in \mathcal{D}$ besteht aus drei Eckpunkten, $v_{i_1^\Delta}, v_{i_2^\Delta}$ und $v_{i_3^\Delta}$, wobei für die Indizes gilt $i_1^\Delta, i_2^\Delta, i_3^\Delta \in \{1, 2, \dots, n\}$. Wir bezeichnen die Winkel an diesen Eckpunkten mit $\alpha_{i_1^\Delta}^\Delta, \alpha_{i_2^\Delta}^\Delta, \alpha_{i_3^\Delta}^\Delta$ und für $i \notin \{i_1, i_2, i_3\}$ setzen wir $\alpha_i^\Delta = 0$. Für den totalen Winkel an einem gegebenen Eckpunkt v_i für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ haben wir also

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{D}} \alpha_i^\Delta = \alpha_i.$$

Wir wissen, dass die Fläche des n-Ecks A_n gleich der Summe der Flächen der Dreiecke A_Δ für $\Delta \in \mathcal{D}$ ist. Für jedes Dreieck kennen wir die Formel aus der Vorlesung und somit bekommen wir die gesuchte Formel:

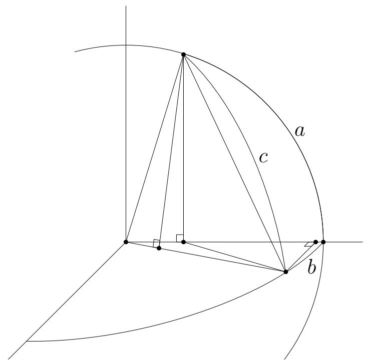
$$\begin{aligned}
A_n = \sum_{\Delta \in \mathcal{D}} A_\Delta &= \left(\sum_{\Delta \in \mathcal{D}} \alpha^\Delta_{i_1^\Delta} + \alpha^\Delta_{i_2^\Delta} + \alpha^\Delta_{i_3^\Delta} - \pi \right) \\
&= \left(\sum_{\Delta \in \mathcal{D}} \alpha^\Delta_{i_1^\Delta} + \alpha^\Delta_{i_2^\Delta} + \alpha^\Delta_{i_3^\Delta} \right) - (n-2)\pi \\
&= \left(\sum_{\Delta \in \mathcal{D}} \alpha^\Delta_1 + \alpha^\Delta_2 + \ldots + \alpha^\Delta_n \right) - (n-2)\pi \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{\Delta \in \mathcal{D}} \alpha^\Delta_i \right) - (n-2)\pi \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Wir betrachten eine sphärische Version des Satzes von Pythagoras: Für ein rechtwinkliges Dreieck mit Seitenlängen a, b, c (wobei der rechte Winkel gegenüber c liegt), gilt immer:

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b).$$

(1) Beweise den sphärischen Satz von Pythagoras mit Hilfe der folgenden Abbildung:



(2) Verwende die Taylor-Entwicklung

$$\cos(a) = 1 - \frac{1}{2}a^2 + \mathcal{O}(a^4)$$

um den Euklidischen Satz vom Pythagoras für kleine Längen a, b, c anzunähern.

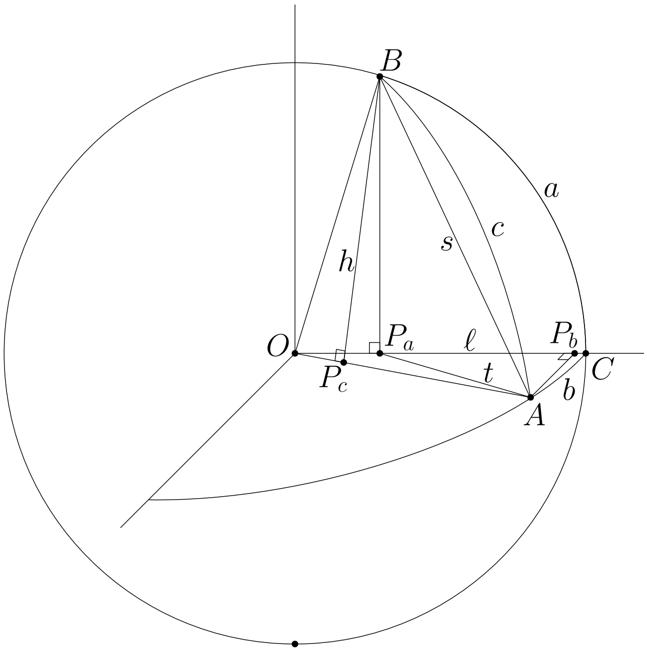


Abbildung 1: Einige Punkte, die in der Lösung verwendet werden.

Lösung:

(1) Zuerst bemerken wir, dass die in der Zeichnung dargestellte Situation für alle rechtwinkligen Dreiecke zutrifft: Wir wählen die x-Achse, so dass sie durch den Eckpunkt geht, wo der rechte Winkel ist, wir wählen die y-Achse, so dass a in der xy-Ebene liegt, und wir wählen die z-Achse, so dass b in der xz-Ebene liegt.

Wir geben einigen wichtigen Punkten Namen, wie in Abbildung 1 dargestellt. Wir bezeichnen die Strecke, die die Punkte P und Q verbindet, sowie ihre Länge mit $\overline{PQ}$.

Wir bemerken, dass $\overline{OP_a} = \cos(a), \overline{OP_b} = \cos(b)$ und $\overline{OP_c} = \cos(c)$ ist. Wir versuchen also die Länge $\overline{OP_c}$ durch die anderen beiden auszudrücken. Dazu verwenden wir wiederholt den Euklidischen Satz des Pythagoras. Für $\ell = \overline{P_aP_b}$ gilt $\ell = \cos(b) - \cos(a)$. Für $t = \overline{P_aA}$ gilt

$$t^2 = \ell^2 + \sin(b)^2 = (\cos(b) - \cos(a))^2 + \sin(b)^2.$$

Für $s = \overline{AB}$ gilt

$$\begin{aligned} s^2 &= t^2 + \sin(a)^2 = (\cos(b) - \cos(a))^2 + \sin(b)^2 + \sin(a)^2 \\ &= \cos(b)^2 - 2\cos(b)\cos(a) + \cos(a)^2 + \sin(b)^2 + \sin(a)^2 \\ &= 2 - 2\cos(b)\cos(a) \end{aligned}$$

wobei wir $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ verwendet haben. Für $h = \overline{BP_c}$ gilt

$$s^2 = h^2 + (1 - \cos(c))^2,$$

was wir als

$$h^2 = s^2 - (1 - \cos(c))^2 = 2 - 2\cos(b)\cos(a) - (1 - \cos(c))^2$$

umschreiben können. Wir wenden den Satz des Pythagoras noch ein letztes mal an, um

$$\begin{aligned} 1^2 &= \cos(c)^2 + h^2 = \cos(c)^2 + 2 - 2\cos(b)\cos(a) - (1 - \cos(c))^2 \\ &= \cos(c)^2 + 2 - 2\cos(b)\cos(a) - 1 + 2\cos(c) - \cos(c)^2 \\ &= 1 - 2\cos(b)\cos(a) + 2\cos(c), \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu $\cos(a)\cos(b) = \cos(c)$.

(2) Wenn a, b, c sehr klein werden, dann werden a^4, b^4 und c^4 noch viel kleiner. Also gilt annäherungsweise

$$\cos(a) \approx 1 - \frac{1}{2}a^2, \quad \cos(b) \approx 1 - \frac{1}{2}b^2, \quad \cos(c) \approx 1 - \frac{1}{2}c^2,$$

was wir in den sphärischen Satz des Pythagoras einsetzen:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2}c^2 &\approx \left(1 - \frac{1}{2}a^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}b^2\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{4}a^2b^2 \end{aligned}$$

Da auch a^2b^2 für kleine a, b extrem klein ist, können wir den letzten Term annäherungsweise vernachlässigen und bekommen

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2}c^2 &\approx 1 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 \\ a^2 + b^2 &\approx c^2. \end{aligned}$$

Falls man sich mit der $\mathcal{O}$-Notation auskennt, kann man auch schreiben

$$a^2 + b^2 + \mathcal{O}(a^4 + b^4 + a^2b^2) = c^2 + \mathcal{O}(c^4).$$

Aufgabe 3

Angenommen wir haben ein Seil der Länge $\ell > 0$, das eine Scheibe berandet, und möchten, dass die Fläche auf beiden Seiten des Seiles möglichst gross ist. Bekommen wir eine grössere Fläche in $\mathbb{R}^2$ oder S^2? Hängt die Antwort von ℓ ab?

Tipp: Zeigen Sie, dass $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

Lösung:

Im Euklidischen Fall wissen wir, dass für eine Scheibe mit Radius r gilt: $\ell = C_{\mathbb{R}^2}(r) = 2\pi r$ und $A_{\mathbb{R}^2}(r) = \pi r^2$. Wir bekommen

$$A_{\mathbb{R}^2}(\ell) = \pi\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4\pi}.$$

Im sphärischen Fall, wissen wir aus der Vorlesung, dass der Umfang $C_{S^2}(r)$ einer sphärischen Scheibe mit Radius r durch $C_{S^2}(r) = 2\pi\sin(r)$ gegeben ist (wobei $r \in (0,\pi]$). Der Flächeninhalt $A_{S^2}(r)$ so einer Scheibe ist durch $A_{S^2}(r) = 2\pi(1-\cos(r))$ gegeben. Wenn wir $\ell = C_{S^2}(r)$ setzen, können wir eine Formel für die Fläche bekommen, die von ℓ abhängt

$$A_{S^2}(\ell) = 2\pi\left(1-\cos\left(\arcsin\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)\right)\right) = 2\pi\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2}\right),$$

wobei wir den Tipp $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ verwendet haben. Bemerke, dass $\ell \leq 2\pi$ und die Formel deshalb Sinn ergibt. Wir beweisen zuerst diese Formel. Sie ist äquivalent zu

$$\cos(\arcsin(x))^2 = 1 - x^2 = \cos(\arcsin(x))^2 + \sin(\arcsin(x))^2 - x^2$$

wobei wir verwendet haben, dass $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also insbesondere auch $t = \arcsin(x)$. Wir können die Formel weiter vereinfachen und bekommen die Gleichung $0 = 0$, was heisst, dass die Formel stimmt.

Wir möchten nun wissen, für welche $\ell \in (0, 2\pi]$ gilt $A_{S^2}(\ell) > A_{\mathbb{R}^2}(\ell)$. Wir haben

$$\begin{aligned}
2\pi\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2}\right) &> \frac{\ell^2}{4\pi} \\
-\sqrt{1-\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2} &> \frac{\ell^2}{8\pi^2} - 1 \\
\sqrt{1-\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2} &< 1 - \frac{\ell^2}{8\pi^2} \\
1-\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 &< \left(1 - \frac{\ell^2}{8\pi^2}\right)^2 \\
1-\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 &< 1 - \frac{\ell^2}{4\pi^2} + \left(\frac{\ell^2}{8\pi^2}\right)^2 \\
0 &< \left(\frac{\ell^2}{8\pi^2}\right)^2 \\
0 &< \ell
\end{aligned}$$

was bedeutet, dass für jeden Umfang ℓ die Euklidische Fläche kleiner ist als die sphärische Fläche.