Serie 3

Bemerkung: In dieser Serie meinen wir immer die Sphäre S^2 mit Radius 1.

Aufgabe 1

Wir betrachten die stereographische Projektion

$$\begin{aligned} f\colon S^2 \setminus \{N\} &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right), \end{aligned}$$

wobei $N = (0,0,1)$.

(1) Zeige, dass L genau dann eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ ist, wenn $f^{-1}(L) \cup \{N\}$ ein Kreis in S^2 ist, der durch den Nordpol geht.

(2) Was ergibt die stereographische Projektion auf Grosskreise[1] angewandt?

(3) Zeige, dass C genau dann ein Kreis in $\mathbb{R}^2$ ist, wenn $f^{-1}(C)$ ein Kreis in S^2 ist, der nicht den Nordpol N enthält.

Lösung:

(1) Die Gerade L sei durch $aX + bY = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir haben

$$\begin{aligned} &f^{-1}\left(\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2\colon aX + bY = c\}\right) \cup \{N\} \\ &\quad = \{(x,y,z) \in S^2 \setminus \{N\}\colon a\frac{x}{1-z} + b\frac{y}{1-z} = c\} \cup \{N\} \\ &\quad = \{(x,y,z) \in S^2\colon ax + by = c(1-z)\} \\ &\quad = \{(x,y,z) \in S^2\colon ax + by + cz = c\}, \end{aligned}$$

also der Schnitt von S^2 mit einer Ebene, also ein Kreis. Ausserdem ist die Gleichung für $(x,y,z) = N = (0,0,1)$ erfüllt. Da f eine Bijektion ist, gilt die Aussage in beide Richtungen.

(2) Kreise auf S^2 sind durch Gleichungen wie $ax+by+cz = d$ gegeben. Die Kreise sind genau dann Grosskreise, wenn ihr Mittelpunkt auf dem Nullpunkt liegt, also $d = 0$. Wir verwenden die Umkehrabbildung (aus der Vorlesung bekannt, Seite 69 im Skript.)

$$\begin{aligned} f^{-}1\colon \mathbb{R}^2 &\to S^2 \setminus \{N\} \\ (X,Y) &\mapsto \left(\frac{2X}{X^2+Y^2+1}, \frac{2Y}{X^2+Y^2+1}, \frac{X^2+Y^2-1}{X^2+Y^2+1}\right), \end{aligned}$$

[1] Ein Kreis auf der Sphäre ist ein Grosskreis, wenn der Mittelpunkt des Kreises auf dem Mittelpunkt der Sphäre liegt.

um das Bild eines Grosskreises zu berechnen. Dabei dürfen wir annehmen, dass $c \neq 0$ ist, da wir diesen Fall schon in (1) behandelt haben.

$$
\begin{aligned}
&f(\{(x,y,z) \in S^2 \setminus \{N\} \colon ax+by+cz=0\}) \\
&\quad= \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \colon a\frac{2X}{X^2+Y^2+1} + b\frac{2Y}{X^2+Y^2+1} + c\frac{X^2+Y^2-1}{X^2+Y^2+1} = 0\right\} \\
&\quad= \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{a2X + b2Y + cX^2 + cY^2 - c}{X^2+Y^2+1} = 0\right\} \\
&\quad= \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \colon cX^2 + 2aX + cY^2 + 2bY - c = 0\right\} \\
&\quad= \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \colon X^2 + 2\frac{a}{c}X + Y^2 + 2\frac{b}{c}Y - 1 = 0\right\} \\
&\quad= \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \colon \left(X + \frac{a}{c}\right)^2 - \frac{a^2}{c^2} + \left(Y + \frac{b}{c}\right)^2 - \frac{b^2}{c^2} - 1 = 0\right\} \\
&\quad= \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \colon \left(X + \frac{a}{c}\right)^2 + \left(Y + \frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}\right\},
\end{aligned}
$$

was einem Kreis mit Mittelpunkt $\left(-\frac{a}{c}, -\frac{b}{c}\right)$ und Radius $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}$ entspricht.

(3) Kreise mit Radius R und Mittelpunkt (X_0, Y_0) in $\mathbb{R}^2$ können durch die Gleichung $(X-X_0)^2 + (Y-Y_0)^2 = R^2$ beschrieben werden. Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
&f^{-1}\left(\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \colon (X-X_0)^2 + (Y-Y_0)^2 = R^2\}\right) \\
&\quad= \left\{(x,y,z) \in S^2 \setminus \{N\} \colon \left(\frac{x}{1-z} - X_0\right)^2 + \left(\frac{y}{1-z} - Y_0\right)^2 = R^2\right\}
\end{aligned}
$$

Wir verwenden $x^2+y^2+z^2 = 1$ um

$$
\begin{aligned}
R^2 &= \left(\frac{x}{1-z} - X_0\right)^2 + \left(\frac{y}{1-z} - Y_0\right)^2 \\
&= \frac{(x - X_0(1-z))^2 + (y - Y_0(1-z))^2}{(1-z)^2} \\
&= \frac{x^2 - 2xX_0(1-z) + X_0^2(1-z)^2 + y^2 - 2yY_0(1-z) + Y_0^2(1-z)^2}{(1-z)^2} \\
&= \frac{1 - z^2 - 2(1-z)(xX_0 + yY_0) + (1-z)^2(X_0^2 + Y_0^2)}{(1-z)^2} \\
&= \frac{(1-z)(1+z) - 2(1-z)(xX_0 + yY_0) + (1-z)^2(X_0^2 + Y_0^2)}{(1-z)^2} \\
&= \frac{1 + z - 2(xX_0 + yY_0) + (1-z)(X_0^2 + Y_0^2)}{1-z}
\end{aligned}
$$

zu berechnen und lösen die Gleichung nach z.

$$\begin{aligned}
R^2 &= \frac{1+z-2(xX_0+yY_0)+(1-z)(X_0^2+Y_0^2)}{1-z} \\
R^2(1-z) &= 1+z-2(xX_0+yY_0)+(1-z)(X_0^2+Y_0^2) \\
R^2 - zR^2 &= 1+z-2X_0x-2Y_0y+X_0^2+Y_0^2-z(X_0^2+Y_0^2) \\
R^2-1-X_0^2-Y_0^2 &= (1-(X_0^2+Y_0^2))z-2X_0x-2Y_0y
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist die Gleichung einer Ebene (von der Form $ax+by+cz=d$). Der Schnitt einer Ebene mit einer Sphäre ist ein sphärischer Kreis und somit wissen wir, dass

$$\begin{aligned}
&f^{-1}\left(\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2\colon (X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2=R^2\}\right) \\
&=\left\{(x,y,z)\in S^2\setminus\{N\}\colon\ -2X_0x-2Y_0y+(1-X_0^2-Y_0^2)z=R^2-1-X_0^2-Y_0^2\right\}
\end{aligned}$$

ein Kreis auf S^2 ist, der nicht den Nordpol N enthält. Da f bijektiv ist, schliessen wir, dass dies eine genau dann wenn Aussage ist.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Ebene mit dem sphärischen Längenelement ds_S. Sei $r\in[0,1]$ fix. Für einen Pfad $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{C}$ mit $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ ist die Länge durch

$$L(\gamma) := \int_\gamma ds_S := \int_a^b \frac{2}{1+|\gamma(t)|^2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

definiert.

(1) Berechne die Länge der Kurve $\gamma_1\colon[0,2\pi]\to\mathbb{C}, t\mapsto r\cos(t)+i\,r\sin(t)$

(2) Berechne die Länge der Kurve $\gamma_2\colon[0,r]\to\mathbb{C}, t\mapsto t$. Für diese Aufgabe darf

$$\int_0^r \frac{2}{1+t^2}dt = \arcsin\left(\frac{2r}{1+r^2}\right)$$

für $r\in[0,1]$ ohne Beweis verwendet werden.

(3) Zeige, dass die Resultate in (1) und (2), mit der bekannten Formel

$$C(R) = 2\pi\sin(R)$$

für den Umfang $C(R)$ eines Kreises mit Radius R übereinstimmt.

Lösung:

(1) Wir bemerken, dass es sich bei γ_1 um einen Kreis mit Radius r handelt. Wir bekommen $\gamma_1(t) = r\cos(t) + i\, r\sin(t) = x(t) + iy(t)$, und können somit die Bestandteile des Integrals berechnen

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin(t), \qquad \frac{dy}{dt} = r\cos(t)$$
$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{r^2(\cos(t)^2 + \sin(t)^2)} = r$$
$$|\gamma_1(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{r^2(\cos(t)^2 + \sin(t)^2)} = r$$

wobei wir $\sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1$ verwendet haben. Wir können nun alles einsetzen

$$L(\gamma_1) = \int_0^{2\pi} \frac{2r}{1+r^2} dt$$

und sehen, dass der Ausdruck im Integral gar nicht von t abhängt. Wir können ihn also als Konstante betrachten und bekommen

$$\begin{aligned} L(\gamma_1) &= \int_0^{2\pi} \frac{2r}{1+r^2} dt = \frac{2r}{1+r^2} \int_0^{2\pi} 1\, dt \\ &= \frac{2r}{1+r^2} [t]_0^{2\pi} = \frac{2r}{1+r^2}(2\pi - 0) = \frac{4\pi r}{1+r^2}. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass die Länge des Kreises unter Verwendung des sphärischen Längenelements anders ist, als die übliche Länge eines Kreises von $2\pi r$.

(2) Wir bemerken, dass es sich bei γ_2 um eine gerade Strecke weg vom Ursprung handelt. Wir haben $\gamma_2(t) = t = x(t) + iy(t)$, also $y(t) = 0$. Wir berechnen die Bestandteile des Integrals

$$\frac{dx}{dt} = 1, \qquad \frac{dy}{dt} = 0$$
$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$
$$|\gamma_2(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{t^2 + 0^2} = t.$$

Wir können nun alles einsetzen und gleich den Tipp verwenden

$$L(\gamma_2) = \int_0^r \frac{2}{1+t^2} dt = \arcsin\left(\frac{2r}{1+r^2}\right)$$

um das Resultat bekommen. Wir bemerken, dass die Länge des Streckenabschnittes anders ist, als die Euklidische Länge r.

(3) Wir bemerken, dass die berechnete Länge in (1) gerade der Umfang $C(R)$ eines Kreises mit Euklidischem Radius r ist. Die berechnete Länge in (2) ist der sphärische Radius R des Kreises mit Euklidischem Radius r. Wir setzen ein und bekommen

$$2\pi\sin(R) \overset{(2)}{=} 2\pi\sin\left(\arcsin\left(\frac{2r}{1+r^2}\right)\right) = 2\pi\frac{2r}{1+r^2} \overset{(1)}{=} C(R).$$

Die Formel für den Umfang von sphärischen Kreisen stimmt also immer noch.