ETH Zürich | D-MATH | Geometrie
Prof. Dr. Tom Ilmanen | Raphael Appenzeller | 5. Nov. 2021

Serie 4

Aufgabe 1

Verwende die hyperbolische Verison von Geogebra[1], um folgende hyperbolische Objekte zu konstruieren. Als Herausforderung können diese hyperbolischen Objekte auch im üblichen Euklidischen Geogebra[2] konstruiert werden.

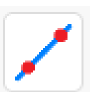
(1) Konstruiere 4 Geodäten, die sich alle jeweils nicht schneiden.

(2) Platziere zwei Punkte und konstruiere die Mittelsenkrechte dazwischen.

(3) Platziere drei Punkte. Konstruiere einen Punkt, der von allen drei Punkten den gleichen Abstand hat. Verwende das Kreis-Tool um einen hyperbolischen Kreis durch die drei Punkte zu legen. Bemerke, dass hyperbolische Kreise auch Euklidische Kreise sind. Wie unterscheiden sich die Mittelpunkte der hyperbolischen/Euklidischen Kreise voneinander?

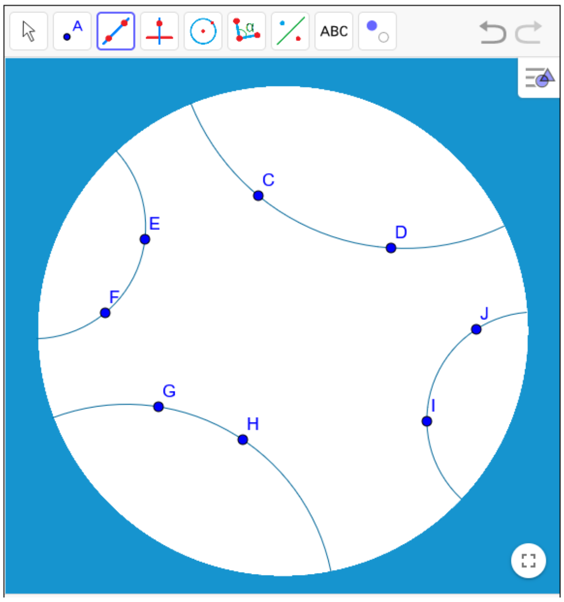
(4) Konstruiere ein 4-Eck mit drei rechten Winkeln und einem Winkel, der strikt kleiner als 90° ist.

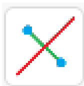
Lösung:

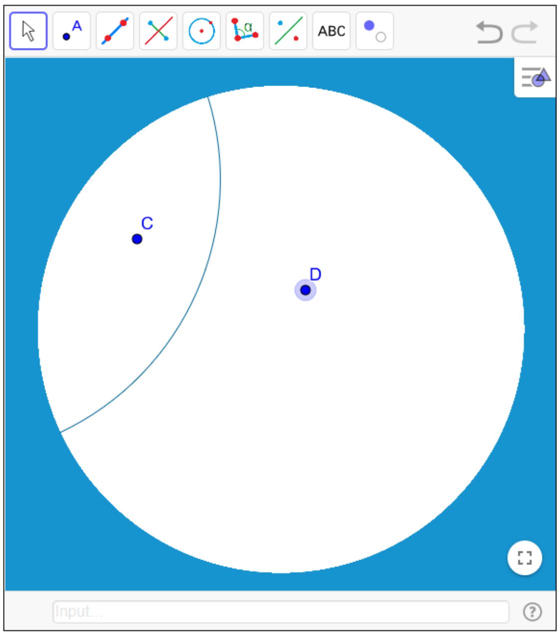
(1) Wir können das Geodäten-Tool verwenden. Das Icon dazu sieht so aus: .

Wir können die Punkte in der Nähe des Randes platzieren, damit wir genügend Platz für vier sich nicht schneidende Geodäten haben:

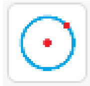
[1] www.geogebra.org/m/tHvDKWdC
[2] www.geogebra.org/geometry

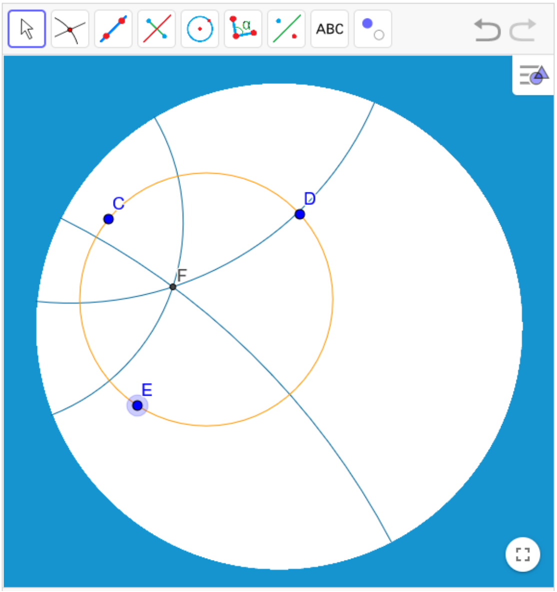


(2) Es gibt ein Mittelsenkrechten-Tool , aber man kann es auch mit anderen Mitteln konstruieren. Das Bild sieht dann so aus:

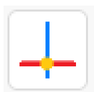


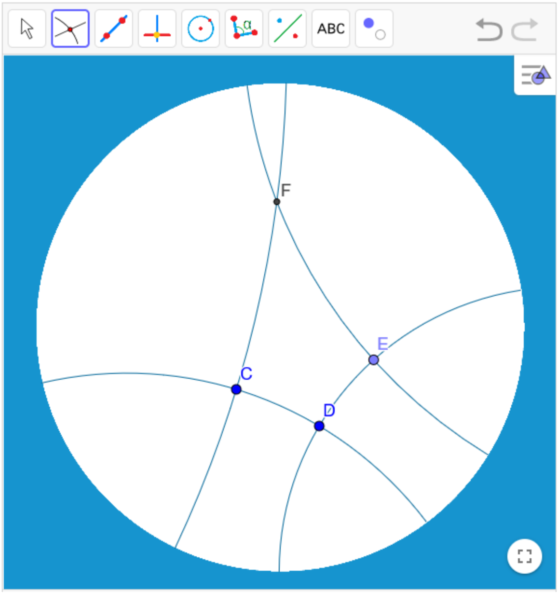
(3) Um den Mittelpunkt des Kreises zu finden, können wir wie im Euklidischen Fall zwei Mittelsenkrechten konstruieren. Sie schneiden sich

im Mittelpunkt des Kreises. Wir verwenden das Kreis-tool  um den Kreis einzuzeichnen.



Wir bemerken, dass für uns aus der Euklidischen Perspektive der Mittelpunkt des hyperbolischen Kreises nicht in der Mitte des Kreises liegt. Das macht aber intuitv Sinn, da die Distanzen grösser werden, wenn man sich Richtung Rand bewegt.

(4) Es gibt ein nützliches Tool , das für einen Punkt auf einer Geraden die Senkrechte zur Gerade durch den Punkt konstruiert. Damit können wir leicht drei rechte Winkel konstruieren und die Punkte so anordnen, dass sich die letzten zwei Seiten schneiden. Der letzte Winkel ist automatisch immer kleiner als $\pi/2$.



Aufgabe 2

Beantworte für die Funktionen (**1**) - (**7**) die Fragen (a) - (e). Es handelt sich immer um stetige Funktionen $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ der Riemann-Sphäre $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Bei (**1**) - (**5**) gilt $f(\infty) = \infty$.

(a) Finde die Fixpunktmenge $\{z \in \hat{\mathbb{C}} \colon f(z) = z\}$.

(b) Wird die Einheitsscheibe erhalten?

(c) Werden V-Kreise zu V-Kreisen gesendet?

(d) Ist die Funktion eingeschränkt auf $\mathbb{C}$ eine Ähnlichkeitsabbildung?

(e) Ist die Funktion orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend?

(**1**) $f_1 \colon z \mapsto z + a$, wobei $a \in \mathbb{C}$ fest.

(**2**) $f_2 \colon z \mapsto rz$, wobei $r > 0$ fest.

(**3**) $f_3 \colon z \mapsto e^{i\varphi} z$, wobei $\varphi \in [0, 2\pi)$ fest.

(**4**) $f_4 \colon z \mapsto \bar{z}$.

(**5**) $f_5 \colon z \mapsto z^2$.

(**6**) $f_6 \colon z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$, wobei $f(\infty) = 0$ und $f(0) = \infty$.

(**7**) $f_7 \colon z \mapsto \frac{1}{z}$, wobei $f(\infty) = 0$ und $f(0) = \infty$.

Lösung:
Sei $F(f)$ die Fixpunktmenge. Wir verwenden die Standarddarstellungen $z = r \cdot e^{i\varphi} = x + iy$ der komplexen Zahlen.

(1) $F(f) = \{\infty\}$, oder $F(f) = \hat{\mathbb{C}}$, wenn $a = 0$. Einheitsscheibe wird nicht erhalten, ausser wenn $a = 0$. Ja, eine Translation erhält Geraden und Kreise. Ja, Translationen sind Isometrien, also Ähnlichkeitsabbildungen. Ja, Translationen sind orientierungserhaltend.

(2) $F(f) = \{0, \infty\}$, oder $F(f) = \hat{\mathbb{C}}$, wenn $r = 1$. Einheitsscheibe wird nicht erhalten, ausser wenn $r = 1$. Ja, eine Skalierung erhält Geraden und Kreise. Ja, Skalierungen sind Ähnlichkeitsabbildungen. Ja, Skalierungen sind orientierungserhaltend (solange $r > 0$).

(3) Es handelt sich um eine Rotation um 0 um den Winkel φ. $F(f) = \{0, \infty\}$, oder $F(f) = \hat{\mathbb{C}}$, wenn $\varphi = 0$. Einheitsscheibe wird erhalten. Ja, eine Rotation erhält Geraden und Kreise. Ja, Rotationen sind Isometrien, also Ähnlichkeitsabbildungen. Ja, Rotationen sind orientierungserhaltend (solange $r > 0$).

(4) Es handelt sich um die Spiegelung an der x-Achse. $F(f) = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im}(z) = 0\} \cup \{\infty\}$, die x-Achse. Einheitsscheibe wird erhalten. Ja, eine Spiegelung erhält Geraden und Kreise. Ja, Spiegelungen sind Isometrien, also Ähnlichkeitsabbildungen. Spiegelungen sind orientierungsumkehrend.

(5) Wir berechnen $f(re^{i\varphi}) = r^2 e^{i2\varphi}$. Damit z ein Fixpunkt sein kann, muss $r = 1, 0$ oder ∞ gelten und $\varphi = 2\varphi$. Diese beiden Bedingungen sind für $F(f) = \{0, 1, \infty\}$ erfüllt. Ja, die Einheitsscheibe wird erhalten, aber irgendwie zwei mal auf sich selber abgebildet.

Die Gerade definiert durch $x = 1$ besteht aus Punkten der Form $z = 1 + it$, $t \in \mathbb{R}$ und wird auf Punkte der Form $z^2 = (1 + it)^2 = 1 + 2it + i^2t^2 = 1 - t^2 + i2t$ gesendet, was mit $y = 2t, x = 1 - t^2$ der Parabel $x = 1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2$ entspricht, also weder einem Kreis noch einer Geraden.

Die Funktion is keine Ähnlichkeitsabbildung, Wir sehen, dass wir für $r > 0$ haben $d(0, r) = r \cdot d(f(0), f(r))$, also keinen konstanten Skalierungsfaktor.

Die Funktion ist orientierungserhaltend.

(6) Dies ist die Inversion am Kreis. Es gilt $f(z) = z$ genau dann wenn $|z|^2 = 1$, also $|z| = 1$, also ist $F(f) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ der Einheitskreis. Das Innere der Einheitsscheibe wird zum Äusseren gemacht, also wird die Einheitsscheibe nicht erhalten. Ja, V-Kreise werden wieder zu V-Kreisen, dies wird in der Vorlesung gezeigt.

Die Abbildung ist keine Ähnlichkeitsabbildung, der Skalierungsfaktor ist nicht überall gleich. Die Abbildung ist orientierungsumkehrend, da es eine Spiegelung am Kreis ist.

(7) Diese Funktion ist sehr ähnlich wie (6). Man kann sie beschreiben als Inversion am Kreis gefolgt einer Spiegelung $z \mapsto \overline{z}$: $f_7 = f_4 \circ f_6$ Wir sehen wir, dass $f(z) = z$ genau dann wenn $z^2 = 1$. Dies gilt für $z = 1$ und $z = -1$. Wir haben somit $F(f) = \{-1, 1\}$. Wie bei der Kreisinversion (6) wird der Einheitskreis auf sich selber abgebildet, aber das innere und das äussere werden vertauscht, also wird die Einheitsscheibe nicht erhalten. Wenn wir diese Funktion als Hintereinanderschaltung von zwei V-Kreisen erhaltenden Abbldungen sehen, ist klar, dass auch f die V-Kreise erhält. Wie (6) hat diese Funktion keinen konstanten Skalierungsfaktor und ist somit keine Ähnlichkeitsabbildung. Wir wissen, dass f_6 und f_4 beide orientierungsumkehrend sind, also ist $f_7 = f_4 \circ f_6$ wieder orientierungserhaltend.

Aufgabe 3

Für $a \in (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f_a \colon \hat{\mathbb{C}} &\to \hat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \frac{z + a}{az + 1}. \end{aligned}$$

Info: Dies ist eine Isometrie der hyperbolischen Ebene.

(1) Berechne $f_a(-a)$ und $f_a(0)$.

(2) Finde alle Fixpunkte von f_a.

(3) Zeige, dass f den Einheitskreis auf den Einheitskreis abbildet.

(4) Skizziere die Wirkung von f auf die hyperbolische Ebene mit Pfeilen.

Lösung:

(1) Wir berechnen

$$f_a(-a) = \frac{-a + a}{-a^2 + 1} = 0, \quad f_a(0) = \frac{0 + a}{a0 + 1} = a$$

und bemerken, dass f die Punkte entlang der x-Achse bewegt.

(2) $z \in \hat{\mathbb{C}}$ ist ein Fixpunkt, wenn $f_a(z) = z$, also wenn $\frac{z+a}{az+1} = z$, also wenn $z + a = az^2 + z$, also wenn $a = az^2$, was genau dann der Fall ist wenn $a = 0$, oder $z^2 = 1$. Wenn $a = 0$, dann ist f_a die Identität und alle Punkte von $\hat{\mathbb{C}}$ sind Fixpunkte. Wenn $a \neq 0$, dann sind 1 und -1 Fixpunkte. Ausserdem sollte $f(\infty) = 1/a$ sein, wie man sieht wenn man $|z|$ gross werden lässt, also ist ∞ kein Fixpunkt von f_a.

(3) Sei $z = x + iy$ mit $x^2 + y^2 = 1$. Wir haben

$$
\begin{aligned}
f_a(z) &= \frac{z+a}{az+1} = \frac{x+iy+a}{ax+iay+1} \\
&= \frac{x+a+iy}{(ax+1)+iay}\frac{(ax+1)-iay}{(ax+1)-iay} \\
&= \frac{(x+a)(ax+1)+ay^2+i(y(ax+1)-(x+a)ay)}{(ax+1)^2+a^2y^2} \\
&= \frac{ax^2+ay^2+a^2x+x+a+i(yax+y-yax-a^2y)}{a^2x^2+a^2y^2+2ax+1} \\
&= \frac{2a+a^2x+x+i(y-a^2y)}{a^2+2ax+1}
\end{aligned}
$$

und berechnen den Betrag

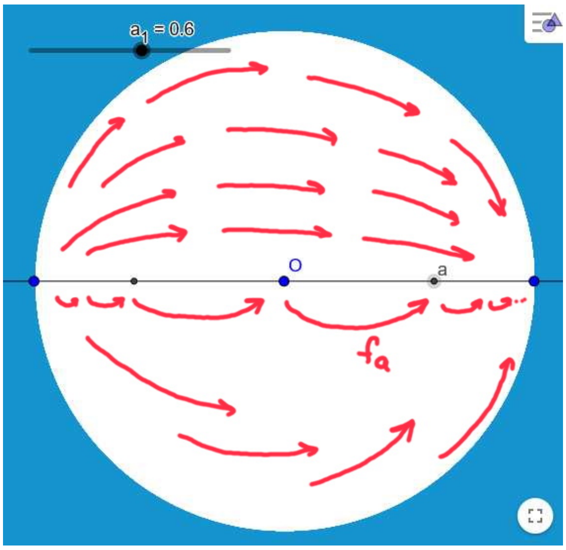
$$
\begin{aligned}
|f_a(z)|^2 &= \frac{(2a+a^2x+x)^2+(y-a^2y)^2}{(a^2+2ax+1)^2} \\
&= \frac{4a^2+a^4x^2+x^2+4a^3x+4ax+2a^2x^2+y^2-2a^2y^2+a^4y^2}{a^4+4a^2x^2+1+4a^3x+4ax+2a^2} \\
&= \frac{4a^2+a^4+1+4a^3x+4ax+2a^2x^2-2a^2y^2}{a^4+4a^2x^2+1+4a^3x+4ax+2a^2}
\end{aligned}
$$

und es gilt $|f_a(z)| = 1$ genau dann wenn

$$
\begin{aligned}
4a^2+a^4+1+4a^3x+4ax+2a^2x^2-2a^2y^2 &= a^4+4a^2x^2+1+4a^3x+4ax+2a^2 \\
4a^2 2a^2x^2-2a^2y^2 &= 4a^2x^2+2a^2 \\
2a^2 &= 2a^2x^2+2a^2y^2 \\
2a^2 &= 2a^2.
\end{aligned}
$$

Wir haben gezeigt, dass der Einheitskreis von f_a wieder auf den Einheitskreis abgebildet wird.

(4) Wir zeichnen ein, in welche Richtung sich die Punkte bewegen. Insgesamt haben wir zwei Fixpunkte am Rand, der eine Fixpunkt ist abstossend und der andere anziehend.


a1 = 0.6
O
a
fa