# Lösung 5

*In dieser Serie erarbeiten wir ein weiteres Modell der hyperbolischen Ebene.*

## Aufgabe 1

Wir betrachten die obere Halbebene $\mathbb{R}^2_+ := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im}(z) > 0\}$ und die Transformation

$$\begin{aligned} f \colon \hat{\mathbb{C}} &\to \hat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto i\frac{z-i}{z+i}. \end{aligned}$$

(Somit ist $f$ $i$ mal die sogenannte *Cayley-Transformation* $z \mapsto (z-i)/(z+i)$.)

(1) Berechne $f$ von $-1, 0, 1, \infty$ und $i$.

(2) Finde eine explizite Formel für die Umkehrfunktion $f^{-1}$ und zeige somit, dass $f$ bijektiv ist.

(3) Zeige, dass $f$ die obere Halbebene $\mathbb{R}^2_+$ auf die Einheitsscheibe $B_1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ abbildet.

**Lösung:**

(1) Wir bekommen

$$\begin{aligned} f(-1) &= i\frac{-1-i}{-1+i} = i\frac{1+i}{1-i}\frac{1+i}{1+i} = i\frac{1+2i-1}{1+1} = -1 \\ f(0) &= i\frac{-i}{i} = -i \\ f(1) &= i\frac{1-i}{1+i}\frac{1-i}{1-i} = i\frac{1-2i-1}{1+1} = 1 \\ f(\infty) &= i \\ f(i) &= i\frac{i-i}{i+i} = 0, \end{aligned}$$

wobei wir für $f(\infty)$ verwendet haben, dass $\frac{z-i}{z+i} \to 1$ wenn $|z| \to \infty$.

(2) Sei $f(z) = w$, wir wandeln um:

$$\begin{aligned} w &= i\frac{z-i}{z+i} \\ (z+i)w &= iz + 1 \\ z(w-i) &= 1 - iw \\ z &= \frac{1-iw}{w-i}. \end{aligned}$$

Also ist $f^{-1}(w) = \frac{1-iw}{w-i} = i\frac{i+w}{i-w}$.

Achtung, wir haben in der Rechung durch $w-i$ geteilt. Wenn $w = i$ ist, sollten wir stattdessen definieren, dass $z = f^{-1}(w) = \infty$ sein soll. Andererseits gilt $f(z) = w = \infty$, wenn $z = -i$, also sollten wir definieren, dass $f^{-1}(\infty) = -i$ sein soll.

Um zu zeigen, dass $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ bijektiv ist sollte man noch bestätigen, dass für alle $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$ gilt $f(f^{-1}(w)) = w$ und $f^{-1}(f(z)) = z$.

(3) Wir betrachten $B_1 = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2\colon X^2 + Y^2 \leq 1\}$ und berechnen zuerst $f(z)$ für $z = x + iy$.

$$\begin{aligned}
f(x+iy) &= i\frac{(x+iy)-i}{(x+iy)+i} \\
&= i\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)} \cdot \frac{x-i(y+1)}{x-i(y+1)} \\
&= i\frac{x^2+(1-y)(1+y)+i(x(y-1)-x(y+1))}{x^2+(y+1)^2} \\
&= \frac{2x}{x^2+(1+y)^2} + i\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(1+y)^2} = X + iY.
\end{aligned}$$

Es gilt also $f(z) \in B_1$ genau dann wenn

$$\begin{aligned}
X^2 + Y^2 &< 1 \\
\left(\frac{2x}{x^2+(1+y)^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(1+y)^2}\right)^2 &< 1 \\
(2x)^2 + \left(x^2+y^2-1\right)^2 &< \left(x^2+(1+y)^2\right)^2 \\
4x^2 + x^4 + y^4 + 1 + 2x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 &< x^4 + 2x^2(1+y)^2 + (1+y)^4 \\
2x^2 + y^4 + 1 + 2x^2y^2 - 2y^2 &< 2x^2 + 4x^2y + 2x^2y^2 + (1+2y+y^2)^2 \\
y^4 + 1 - 2y^2 &< 4x^2y + 1 + 4y^2 + y^4 + 4y + 4y^3 + 2y^2 \\
-2y^2 &< 4x^2y + 4y^2 + 4y + 4y^3 + 2y^2 \\
0 &< 4y(y^2 + 2y + x^2 + 1).
\end{aligned}$$

Wir betrachten die quadratische Gleichung $Q(y) := y^2 + 2y + x^2 + 1$. Wir bemerken, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt $Q(y) > 0$, da $Q(0) > 0$ und die Diskriminante $4 - 4(x^2+1)$ negativ ist und somit $Q$ keine Nullstellen hat. Somit folgt, dass $0 < 4yQ(y)$, genau dann gilt, wenn $y > 0$ gilt. Eine sorgfältige Analyse zeigt, dass wir nie durch 0 geteilt haben und keine Probleme mit $z = \infty$ auftauchen. Wir haben gezeigt, dass $f^{-1}(B_1) = \mathbb{R}^2_+$.

## Aufgabe 2

Wir definieren eine Metrik $d_{\mathbb{H}_+}$ auf $\mathbb{R}^2_+$ in dem wir das Längenelement

$$ds_{\mathbb{H}_+} := h_{\mathbb{H}_+}(z)\, ds_{\mathbb{E}} := \frac{1}{y}\, ds_{\mathbb{E}}, \qquad z = x + iy \in \mathbb{R}^2_+,$$

angeben. Es stellt sich heraus, dass $f$ aus Aufgabe 1 eine Isometrie vom metrischen Raum $\mathbb{H}_+ := (\mathbb{R}^2_+, d_{\mathbb{H}_+})$ zur hyperbolischen Ebene $\mathbb{H} = (B_1, d_{\mathbb{H}})$ ist. Somit sind sowohl $\mathbb{H}_+$, als auch $\mathbb{H}$ Modelle der hyperbolischen Ebene.

Wir betrachten den Pfad $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{H}_+,\ t \mapsto ti$, wobei $0 < a < b$.

(1) Berechne die Länge
$$L_{\mathbb{H}_+}(\gamma) = \int_\gamma ds_{\mathbb{H}_+}$$
des Pfades $\gamma$.

(2) Zeige, dass der Pfad $\gamma$ eine minimierende Geodäte in $\mathbb{H}_+$ ist.

(3) Zeige, dass für $0 < a < b$ gilt
$$d_{\mathbb{H}_+}(ia, ib) = d_{\mathbb{H}}(f(ia), f(ib)).$$
Also ist $f$ mindestens auf $\gamma$ eine Isometrie.

**Lösung:**

(1) Wir schreiben $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, wobei $x(t) = 0$ und $y(t) = t$ ist. Somit gilt $\mathrm{Im}(\gamma(t)) = y(t) = t$ und
$$|\gamma'(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$$
Wir berechnen
$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}_+}(\gamma) &= \int_\gamma ds_{\mathbb{H}_+} = \int_a^b h_{\mathbb{H}_+}(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)|\ dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{t}\ dt = \log(b) - \log(a). \end{aligned}$$

(2) Wir bemerken, dass für jeden Pfad $\tilde\gamma(t) = \tilde x(t) + \tilde y(t)$ mit $\tilde x(a) = 0 = \tilde x(b)$ gilt
$$\begin{aligned} |\tilde\gamma'(t)| &= \sqrt{\left(\frac{d\tilde x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\tilde y}{dt}\right)^2} \\ &\geq \sqrt{\left(\frac{d\tilde y}{dt}\right)^2} = \left|\frac{d\tilde y}{dt}\right| = |(i\tilde y)'(t)| \end{aligned}$$
Sei also $\hat\gamma(t) = i\tilde y(t)$, der auf die $y$-Achse projezierte Pfad. Wir bemerken, dass gilt $h_{\mathbb{H}_+}(\tilde\gamma(t)) = h_{\mathbb{H}_+}(\hat\gamma(t))$ und $|\tilde\gamma'(t)| \geq |\hat\gamma'(t)|$. Somit ist
$$L(\tilde\gamma) = \int_a^b h_{\mathbb{H}_+}(\tilde\gamma(t))|\tilde\gamma'(t)|dt \geq \int_a^b h_{\mathbb{H}_+}(\hat\gamma(t))|\hat\gamma'(t)|dt = L(\hat\gamma).$$

Wir wissen, dass die Länge eines Pfades kürzer ist, wenn er sich nie selber überschneidet und ausserdem wissen wir, dass die Länge des Pfades nicht von der Parametrisierung abhängt. Wir bekommen also $L(\tilde{\gamma}) \geq L(\hat{\gamma}) \geq L(\gamma)$. Da dies für alle Pfade $\tilde{\gamma}$ mit $\tilde{\gamma}(a) = \gamma(a)$ und $\tilde{\gamma}(b) = \gamma(b)$ gilt, haben wir

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}_+}(\gamma) &= d_{\mathbb{H}_+}(\gamma(a), \gamma(b)) \\ &:= \inf \left\{ L_{\mathbb{H}_+}(\tilde{\gamma}) \colon \tilde{\gamma} \text{ ist ein Pfad von } \gamma(a) \text{ nach } \gamma(b) \right\}. \end{aligned}$$

Der Pfad $\gamma$ minimiert also sogar global die Distanz, also ist es eine minimierende Geodäte.

(3) Die Punkte $ai, bi \in \mathbb{H}_+$ werden auf die Punkte

$$f(ai) = i\frac{ai - i}{ai + i} = i\frac{a-1}{a+1}, \quad f(bi) = i\frac{b-1}{b+1}$$

gesendet, also Punkte auf dem $y$-Achsensegment von $\mathbb{H}$. Für zwei Punkte $u, v \in (-1, 1) \subseteq \mathbb{C}$ auf dem $x$-Achsensegment kennen wir Formeln für den Abstand, siehe Skript Kapitel 25.

$$d_{\mathbb{H}}(u, v) = \left| \log \left( \frac{(1-u)(1+v)}{(1+u)(1-v)} \right) \right|$$

und wir wissen, dass $d_{\mathbb{H}}(u, v) = d_{\mathbb{H}}(iu, iv)$, da der Skalierungsfaktor $h_{\mathbb{H}}$ rotationsinvariant ist. Wir können also berechnen

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(f(ai), f(bi)) &= d_{\mathbb{H}} \left( i\frac{a-1}{a+1}, i\frac{b-1}{b+1} \right) \\ &= d_{\mathbb{H}} \left( \frac{a-1}{a+1}, \frac{b-1}{b+1} \right) \\ &= \left| \log \left( \frac{\left(1 - \frac{a-1}{a+1}\right)\left(1 + \frac{b-1}{b+1}\right)}{\left(1 + \frac{a-1}{a+1}\right)\left(1 - \frac{b-1}{b+1}\right)} \right) \right| \\ &= \left| \log \left( \frac{\frac{(a+1)-(a-1)}{a+1} \frac{(b+1)+(b-1)}{b+1}}{\frac{(a+1)+(a-1)}{a+1} \frac{(b+1)-(b-1)}{b+1}} \right) \right| \\ &= \left| \log \left( \frac{4b}{4a} \right) \right| \\ &= \log(b) - \log(a) = d_{\mathbb{H}_+}(ai, bi). \end{aligned}$$

wobei wir die Teilaufgaben (1) und (2) im letzten Teilschritt verwendet haben.

## Aufgabe 3

(1) Zeige, dass die Geodäten in $\mathbb{H}_+$ genau die Halbgeraden und Halbkreise sind, die senkrecht zur $x$-Achse stehen.

(2) Welcher Geodäte in $\mathbb{H}_+$ entspricht der $x$-Achsenabschnitt in $\mathbb{H}$?

(3) Für $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ zeichne die Geodäten $\alpha_k = \{k + ia \in \mathbb{C} \colon a > 0\}$ in $\mathbb{H}_+$ und die entsprechenden Geodäten $f(\alpha_k)$ in $\mathbb{H}$.

**Lösung:**

(1) Da Geodäten durch die Distanz definiert sind und $f$ die beiden Modelle der hyperbolischen Ebene isometrisch abbildet, entsprechen die Geodäten in $\mathbb{H}_+$ den Geodäten in $\mathbb{H}$. Die Geodäten in $\mathbb{H}$ sind gerade die Geraden- und Kreissegmente, die senkrecht zum Einheitskreis stehen. Die Cayley-Transformation (und somit auch $f$) ist winkelerhaltend, und bildet somit V-Kreise auf V-Kreise ab. Also sind auch die Geodäten in $\mathbb{H}_+$ durch V-Kreise definiert. Der Einheitskreis wird von $f^{-1}$ auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ gesendet. Somit müssen alle Geodäten in $\mathbb{H}_+$ senkrecht zur die $x$-Achse stehen. Somit sind alle Geodäten in $\mathbb{H}_+$ entweder senkrechte Strahlen, die senkrecht auf die $x$-Achse treffen und senkrecht nach oben gehen (sie nähern sich dem Punkt $\infty$), oder es sind Halbkreise, dessen Mittelpunkt auf der $x$-Achse liegt.

(2) Die Geodäten sind durch ihre Endpunkte auf dem Rand von $\mathbb{H}$ bez. $\mathbb{H}_+$ schon vollständig bestimmt. Der $x$-Achsenabschnitt in $\mathbb{H}$ beginnt bei $-1$ und hört bei $1 \in \mathbb{C}$ auf. Wir berechnen $f^{-1}(-1) = -1$ und $f^{-1}(1) = 1$, also ändern sich diese zwei Endpunkte nicht. Die Geodäte in $\mathbb{H}_+$ mit den Endpunkten $-1$ und $1$ ist gegeben durch

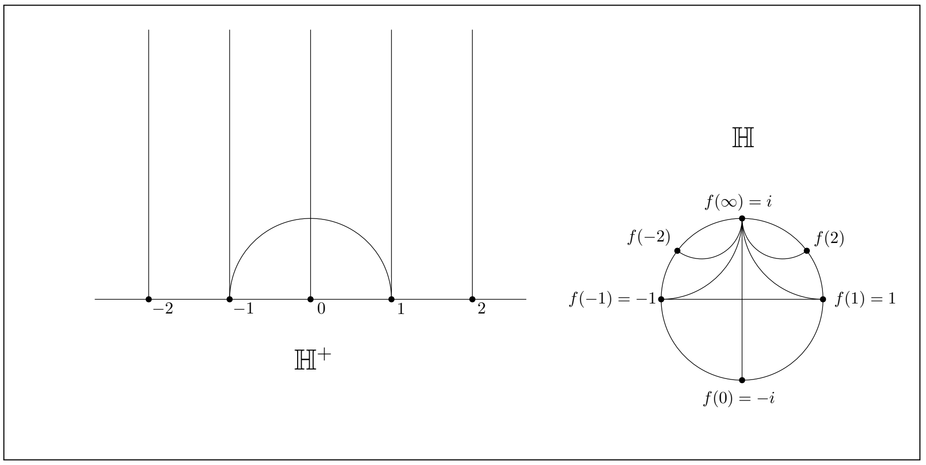
$$\{z \in \mathbb{H}_+ \colon |z| = 1\},$$

also den Halbkreis mit Radius 1 und Mittelpunkt 0. Diese beiden Geodäten sind auch im Bild der Lösung von (3) abbgebildet.

(3) Die Geodäten $g_k = \{k + ia \in \mathbb{H}_+ \colon a > 0\}$ haben alle den Endpunkt $\infty$ gemeinsam. Der andere Endpunkt von $g_k$ ist jeweils $k \in \mathbb{C}$. Wir verwenden die Formel aus Aufgabe 1(2) und berechnen

$$f(-2) = i\frac{-2-i}{-2+i} = -i\frac{i+2}{i-2} \cdot \frac{i+2}{i-2} = -i\frac{-1+4i+4}{-1-4} = -\frac{4}{5} + i\frac{3}{5},$$
$$f(-1) = -1, \quad f(0) = -i, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = \frac{4}{5} + i\frac{3}{5}$$

und erinnern uns, dass $f(\infty) = i$. Somit können wir alle Geodäten in den beiden Modellen einzeichnen:


$-2$
$-1$
$0$
$1$
$2$
$\mathbb{H}^+$
$\mathbb{H}$
$f(\infty) = i$
$f(-2)$
$f(2)$
$f(-1) = -1$
$f(1) = 1$
$f(0) = -i$